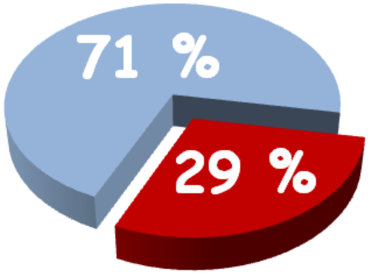
Tiesitkö tätä?

MAFY:n lääkiskurssi 2,5-kertaistaa mahdollisuutesi päästä sisään yhdellä yrityksellä. Poikkeuksellisen kovista tuloksista johtuen lääkikset alkavatkin täyttyä MAFY:n kurssilaisista.



29 % vuonna 2016 Helsingin suomenkieliseen yleislääkikseen päässeistä tuli MAFY:n kurssilta.

Lääkiskurssi

- 5-8 täysmittaista harjoituspääsykoetta oikeassa koesalissa.
- Yksilöllinen opetus mahdollistaa etenemisen omassa tahdissa. Kaikissa ryhmissä on korkeintaan 16 oppilasta yhtä opettajaa kohden.
- Voit aloittaa valintasi mukaan 29.8., 31.10., 9.1., 20.2. tai 28.3. Oppitunnin ajankohdaksi voi yleensä valita aamun, iltapäivän tai illan.

DI-pääsykoekurssi

- Voit harjoitella matematiikkaa, fysiikkaa ja kemiaa pääsykoetta varten.
- 4 täysmittaista harjoituskoetta kustakin aineesta ja pitkällä kurssilla lisäksi 2 yo-harjoituskoetta kustakin aineesta.
- Pitkäkurssi 28.3.-26.5. ja kevätkurssi 20.2.-26.5.

Pitkä matematiikka, syksy 2016

Mallivastaukset, 28.9.2016

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen, jota ennen Teemu opetti 5 vuotta lukiossa ja Antti toimi tuntiopettajana TKK:lla. Nykyään Teemu vastaa MAFY:n Jyväskylän kursseista ja Antti vastaa Mafynetti-ohjelman kehityksestä. Muut mallivastaustiimin jäsenet ovat Sakke Suomalainen, Matti Virolainen ja Viljami Suominen. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, valmennuskursseihin sekä matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali.

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:
`www.mafyvalmennus.fi/yhteystiedot`
`info@mafyvalmennus.fi`

Lääkis-, DI- ja yo-valmennuskurssit - oppimateriaalit - etäkurssit

1. Mitkä väitteet A – F ja kaavat 1–6 liittyvät toisiinsa? Merkitse vastauksesi alimpaan taulukkoon.

	Väite
A	Luku b on 50% suurempi kuin luku a.
B	Luku a on neljäsosa luvusta b.
C	Luku b on puolet luvusta a.
D	Luku b on 25% suurempi kuin luku a.
E	Luku b on kaksinkertainen lukuun a verrattuna.
F	Luku a on nelinkertainen lukuun b verrattuna.

	Kaava
1	$b = 2a$
2	$b = 0{,}5a$
3	$b = 1{,}5a$
4	$b = \frac{1}{4}a$
5	$b = 4a$
6	$b = \frac{5}{4}a$

Väite	A	B	C	D	E	F
Kaavan numero						

Ratkaisu.

Väite	A	B	C	D	E	F
Kaavan numero	3	5	2	6	1	4

Pisteytys: 1 piste / oikein vastattu kohta. 6p

Selitykset (ei vaadittu vastauksessa):

A-3) 50% luvusta a on 50 sadasosaa luvusta a, eli $\frac{50}{100}a = 0{,}5a$. Jos luku b on 50% suurempi kuin luku a, luku b saadaan siis, kun lukuun a lisätään 50% luvusta a, eli

$$b = a + 0{,}5a = 1{,}5a.$$

Näin ollen kohtaan A sopii kaava 3.

B-5) Neljäsosa luvusta b on $\frac{b}{4}$, joten jos a on neljäsosan luvusta b,

$$\begin{aligned} a &= \frac{b}{4} \quad \| \cdot 4 \\ 4a &= b \\ b &= 4a. \end{aligned}$$

Näin ollen kohtaan B sopii kaava 5.

C-2) Jos luku b on puolet luvusta a,

$$b = \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \cdot a = 0{,}5a.$$

Näin ollen kohtaan C sopii kaava 2.

D-6) 25% luvusta a on 25 sadasosaa luvusta a, eli $\frac{25}{100}a = \frac{1}{4}a$. Jos luku b on 25% suurempi kuin luku a, luku b saadaan siis, kun lukuun a lisätään 25% luvusta a, eli

$$b = a + \frac{1}{4}a = \frac{5}{4}a.$$

Näin ollen kohtaan D sopii kaava 6.

E-1) Luku b on kaksinkertainen lukuun a verrattuna, eli luku b on kaksi kertaa luku a.

$$b = 2a.$$

Näin ollen kohtaan E sopii kaava 1.

F-4) Luku a on nelinkertainen lukuun b verrattuna, eli luku a on neljä kertaa luku b.

$$\begin{aligned} a &= 4b \quad \| : 4 \\ b &= \frac{1}{4}a. \end{aligned}$$

Näin ollen kohtaan F sopii kaava 4.

2.

a) Sievennä lauseke $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a^2}}}$, kun $a \geq 0$.

b) Laske funktion
$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} + 1$$
derivaatan arvo kohdassa $x = 2$.

c) Laske ja sievennä
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x.$$

Ratkaisu.

a) Neliöjuuren määritelmän nojalla $\sqrt{a^2} = a$, kun $a \geq 0$, joten

$$\begin{aligned}\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a^2}}} &= \sqrt{a\sqrt{a \cdot a}}\\ &= \sqrt{a\sqrt{a^2}}\\ &= \sqrt{a \cdot a}\\ &= \sqrt{a^2}\\ &= \underline{\underline{a}}.\end{aligned}$$

1p

1p(2p)

b) Derivoidaan funktio f:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x}{2} + \frac{2}{x} + 1\\ f(x) &= \frac{1}{2} \cdot x^1 + 2 \cdot x^{-1} + 1\\ f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x^{1-1} + 2 \cdot (-1) \cdot x^{-1-1} + 0\\ f'(x) &= \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}.\end{aligned}$$

1p(3p)

Lasketaan derivaatan arvo kohdassa $x = 2$:

$$\begin{aligned}f'(2) &= \frac{1}{2} - \frac{2}{2^2}\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\\ &= \underline{\underline{0}}.\end{aligned}$$

1p(4p)

c)

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x + \sin x) && \text{1p(5p)} \\
&= \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - (-\cos(0) + \sin(0)) \\
&= (-0+1) - (-1+0) \\
&= \underline{\underline{2}}. && \text{1p(6p)}
\end{aligned}
$$

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita koevastauksessa.

3. Digitaalisten sovellusten ansiosta binäärilogaritmin $\operatorname{lb} x = \log_2 x$ käyttö on yleistynyt.
   a) Ratkaise yhtälö $\operatorname{lb}(x+1) - \operatorname{lb}(4x) = 1$.
   b) Millä arvoilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ on voimassa $2 \leq \operatorname{lb} n \leq 3$?

Ratkaisu.

a) Ratkaistaan yhtälö
$$\operatorname{lb}(x+1) - \operatorname{lb}(4x) = 1.$$
Yhtälö on määritelty, kun
$$\begin{aligned} x+1 &> 0 && \text{ja} && 4x > 0 \quad \| :4 \\ x &> -1 && \text{ja} && x > 0, \end{aligned}$$
eli kun $x > 0$.

Käytetään logaritmikaavaa $\log(x) - \log(y) = \log\left(\frac{x}{y}\right)$, jolloin yhtälö saa muodon
$$\operatorname{lb}\left(\frac{x+1}{4x}\right) = 1.$$ 1p

Logaritmin määritelmän nojalla $\log_2(x) = y \Leftrightarrow x = 2^y$.
$$\begin{aligned} \frac{x+1}{4x} &= 2^1 \quad \| \cdot 4x \\ x+1 &= 2 \cdot 4x \\ x+1 &= 8x \\ 8x - x &= 1 \\ 7x &= 1 \quad \| :7 \\ x &= \underline{\underline{\frac{1}{7}}}. \end{aligned}$$
1p(2p) 1p(3p)

b) Tutkitaan, millä n:n arvolla yhtäsuuruudet toteutuvat, eli millä n_1 pätee $2 = \operatorname{lb}(n_1)$ ja millä n_2 pätee $\operatorname{lb}(n_2) = 3$. Logaritmin määritelmän nojalla $\log_2(x) = y \Leftrightarrow x = 2^y$.
$$\begin{aligned} \operatorname{lb}(n_1) &= 2 \\ n_1 &= 2^2 = 4 \\ \operatorname{lb}(n_2) &= 3 \\ n_2 &= 2^3 = 8. \end{aligned}$$ 1p(4p)

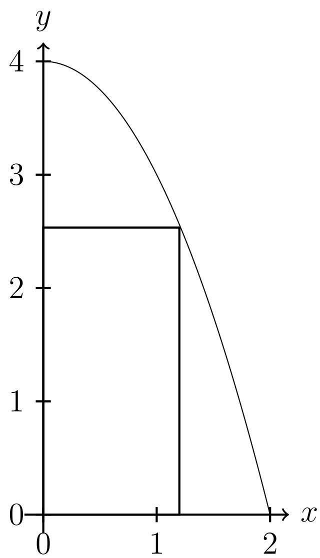
Logaritmifunktio on aidosti monotoninen, 1p(5p)

joten $2 \leq \mathrm{lb}(n) \leq 3$ täsmälleen silloin, kun $n_1 \leq n \leq n_2$, eli $4 \leq n \leq 8$. Kaksoisepäyhtälö on siis voimassa n:n arvoilla $\underline{\underline{n = 4, 5, 6, 7, 8}}$. 1p(6p)

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita koevastauksessa.

4.

Suorakulmion yksi kärki on origossa, ja siitä lähtevät kaksi sivua sijaitsevat positiivisilla koordinaattiakseleilla. Neljäs kärki sijaitsee paraabelilla $y = 4 - x^2$ alueessa $x \geq 0$, $y \geq 0$. Määritä suorakulmion suurimman mahdollisen pinta-alan tarkka arvo.



Ratkaisu.

Suorakulmion oikeanpuoleinen ylempi kärki on paraabelilla $y = 4 - x^2$ ja vasen alakärki on origossa, joten sen leveys (kanta) on $x > 0$ ja korkeus on $4 - x^2$. 1p

Paraabeli leikkaa x-akselin pisteessä, jossa $y = 0$, eli

$$\begin{aligned} y &= 4 - x^2 \\ 0 &= 4 - x^2 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \underset{(-)}{+} 2 \end{aligned}$$

Näin ollen suorakulmion kanta on välillä $0 < x < 2$. 0.5p (1.5p)

Suorakulmion pinta-ala on kanta kertaa korkeus

$$A(x) = x \cdot (4 - x^2) = 4x - x^3.$$ 0.5p (2p)

Tutkitaan pinta-alafunktiota $A(x)$ suljetulla välillä $0 \leq x \leq 2$. Derivoidaan $A(x)$.

$$\begin{aligned} A(x) &= 4 \cdot x^1 - x^3 \\ A'(x) &= 4 \cdot 1 \cdot x^{1-1} - 3 \cdot x^{3-2} \\ A'(x) &= 4 - 3x^2. \end{aligned}$$ 1p(3p)

Etsitään derivaatan nollakohdat:

$$
\begin{aligned}
A'(x) &= 0 \\
4 - 3x^2 &= 0 \\
3x^2 &= 4 \quad \| : 3 \\
x^2 &= \frac{4}{3} \\
x &= {\scriptstyle(\pm)}\sqrt{\frac{4}{3}}.
\end{aligned}
$$

1p(4p)

Derivoituvan funktion suurin arvo suljetulla välillä löytyy derivaatan nollakohdista tai välin päätepisteistä.

0.5p (4.5p)

$$
\begin{aligned}
A(0) &= 4 \cdot 0 - 0^3 = 0 \\
A(2) &= 4 \cdot 2 - 2^3 = 0
\end{aligned}
$$

0.5p (5p)

$$
\begin{aligned}
A\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) &= 4 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} - \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^3 \\
&= 4 \cdot \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} - \left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}\right)^3 \\
&= 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \\
&= \frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{2^3}{\sqrt{3}^3} \\
&= \frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{8}{\sqrt{3}^2 \cdot \sqrt{3}} \\
&= \frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{8}{3\sqrt{3}} \\
&= \frac{8}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} \\
&= \frac{16}{3\sqrt{3}} \qquad \leftarrow \text{suurin arvo}
\end{aligned}
$$

Vastaus: Suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala on $\frac{16}{3\sqrt{3}}$.

1p(6p)

5.

a) Kolmion kulmat muodostavat aritmeettisen jonon, ja yhden kulman suuruus on 103°. Määritä kulmien suuruudet asteina.

b) Kolmion kulmat muodostavat geometrisen jonon, ja yhden kulman suuruus on $\frac{\pi}{7}$ radiaania. Määritä kulmien suuruudet radiaaneina.

Ratkaisu.

a) Olkoon kolmion kulmat α_1, α_2 ja $\alpha_3 = 103°$. Kolmion kulmien summa on 180°, joten

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 180° \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 103° &= 180° \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 180° - 103° \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 77° \qquad (1) \end{aligned}$$

Näin ollen α_1 ja α_2 ovat pienempiä kuin 77°, joten α_3 on kulmista suurin. 0.5p

Olkoon $\alpha_1 < \alpha_2$. Kulmat muodostavat aritmeettisen jonon, joten

0.5p (1p)

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_3 - d, \qquad (2) \\ \alpha_1 &= \alpha_3 - 2d. \qquad (3) \end{aligned}$$

0.5p (1.5p)

Sijoitetaan yhtälöt (2) ja (3) yhtälöön (1).

$$\begin{aligned} \alpha_3 - 2d + \alpha_3 - d &= 77° \\ 3d &= 2\alpha_3 - 77° \\ d &= \frac{2\alpha_3 - 77°}{3} \\ d &= \frac{2 \cdot 103° - 77°}{3} \\ d &= 43°. \end{aligned}$$

0.5p (2p)

Näin ollen kulmat α_1 ja α_2 saadaan yhtälöistä (2) ja (3):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_3 - 2d = 103° - 2 \cdot 43° = 17° \\ \alpha_2 &= \alpha_3 - d = 103° - 43° = 60°. \end{aligned}$$

Vastaus: Kulmien suuruudet ovat 17°, 60° ja 103°. 1p(3p)

b) Olkoon kolmion kulmat $\beta_1 = \frac{\pi}{7}$, β_2 ja β_3. Olkoon $\beta_2 < \beta_3$. Kolmion kulmien summa on π, joten

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= \pi \\ \frac{\pi}{7} + \beta_2 + \beta_3 &= \pi \\ \beta_2 + \beta_3 &= \frac{6\pi}{7}, \qquad (4) \end{aligned}$$

Näin ollen kulma β_1 ei voi olla kulmista suurin. Tutkitaan ensin, löytyykö sellaista ratkaisua, jossa β_1 on kulmista pienin. Kulmat muodostavat geometrisen jonon, joten tässä tapauksessa

$$\beta_2 = q \cdot \beta_1, \qquad (5)$$
$$\beta_3 = q^2 \cdot \beta_1, \qquad (6)$$

0.5p (3.5p)

missä $q > 1$. Sijoitetaan yhtälöt (5) ja (6) yhtälöön (4).

$$\begin{aligned} q\beta_1 + q^2\beta_1 &= \frac{6\pi}{7} \\ \frac{\pi}{7}q^2 + \frac{\pi}{7}q - \frac{6\pi}{7} &= 0 \quad \| : \frac{\pi}{7} \\ q^2 + q - 6 &= 0 \end{aligned}$$

0.25p (3.75p)

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$\begin{aligned} q &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} \\ q &= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \\ q &= \frac{-1 \underset{(-)}{+} 5}{2} \quad (q > 1) \\ q &= 2. \end{aligned}$$

0.25p (4p)

Kulmat ovat siis

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\pi}{7}, \\ \beta_2 &= 2 \cdot \beta_1 = 2 \cdot \frac{\pi}{7} = \frac{2\pi}{7}, \\ \beta_3 &= 2^2 \cdot \beta_1 = 4 \cdot \frac{\pi}{7} = \frac{4\pi}{7}. \end{aligned}$$

Kulmat β_1, β_2 ja β_3

0.5p (4.5p)

Tutkitaan seuraavaksi, löytyykö ratkaisua, jossa kulma β_1 on suuruusjärjestyksessä kulmista keskimmäinen. Kulmat muodostavat geometrisen jonon, joten tässä tapauksessa

$$\begin{aligned} \beta_1 &= q \cdot \beta_2 \\ \beta_2 &= q^{-1}\beta_1 \end{aligned} \tag{7}$$

ja

$$\beta_3 = q \cdot \beta_1 \tag{8}$$

0.5p (5p)

Sijoitetaan yhtälöt (7) ja (8) yhtälöön (4).

$$\begin{aligned} q^{-1}\beta_1 + q\beta_1 &= \frac{6\pi}{7} \quad \| \cdot q \\ \beta_1 + q^2\beta_1 &= \frac{6\pi}{7}q \\ \frac{\pi}{7} + q^2 \cdot \frac{\pi}{7} &= \frac{6\pi}{7}q \quad \| : \frac{\pi}{7} \\ 1 + q^2 &= 6q \\ q^2 - 6q + 1 &= 0 \end{aligned}$$

0.25p (5.25p)

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$\begin{aligned} q &= \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\ q &= \frac{6 \underset{(-)}{\pm} \sqrt{32}}{2} \quad (q > 1) \\ q &= \frac{6 + 2\sqrt{8}}{2} \\ q &= 3 + \sqrt{8}. \end{aligned}$$

0.25p (5.5p)

Kulmat ovat siis

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\pi}{7} \\ \beta_2 &= q^{-1}\beta_1 = \frac{\pi}{7(3+\sqrt{8})} \\ \beta_3 &= q\beta_1 = \frac{(3+\sqrt{8})\pi}{7}. \end{aligned}$$

Kulmat β_1, β_2 ja β_3

0.5p (6p)

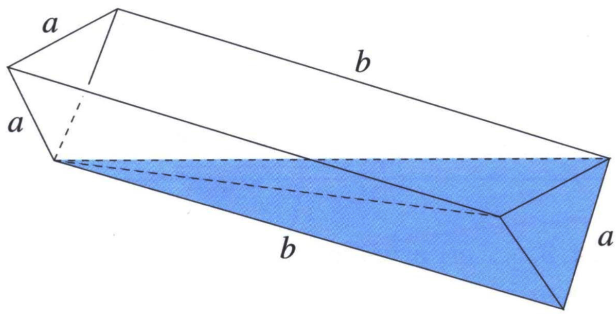
Vastaus: Kolmion kulmat ovat joko $\frac{\pi}{7}$, $\frac{2\pi}{7}$ ja $\frac{4\pi}{7}$ tai $\frac{\pi}{7(3+\sqrt{8})}$, $\frac{\pi}{7}$ ja $\frac{(3+\sqrt{8})\pi}{7}$.

Huom! Ytl:n hyvän vastauksen piirteissä oli ratkaistu vain yhdet kulmat, joten on mahdollista, että täysien pisteiden saamiseksi ei tarvitse löytää molempia ratkaisuja.

6. Vesikaukalon päädyt ovat tasasivuisen kolmion muotoiset, ja kolmion sivujen pituus on a. Kaukalon pohja koostuu kahdesta suorakulmion muotoisesta levystä, joiden pituus on b.

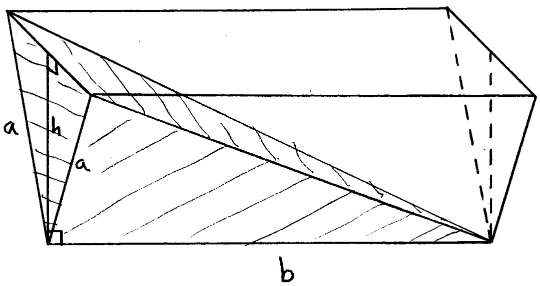
   a) Vaakasuorassa oleva kaukalo on aluksi täynnä vettä. Sitä kallistetaan pituussuunnassa niin, että vedenpinta ulottuu vasemmanpuoleisen päätykolmion alakulmaan alla olevan kuvion mukaisesti. Kuinka monta prosenttia vedestä valuu pois kallistuksen aikana?

   b) Tämän jälkeen kaukalo palautetaan takaisin vaakasuoraan asentoon. Kuinka korkealla vedenpinta on kaukalon syvimmästä kohdasta mitattuna?



Ratkaisu.

a)



Kun kaukaloa kallistetaan tehtävänannon mukaisesti, vesiosa on muodoltaan kartio, jonka pohja (pinta-ala A_p) on tasasivuinen kolmio (sivunpituus a) ja korkeus b. Veden tilavuus on siis

$$V_2 = \frac{A_p \cdot b}{3}$$ 1p

ja kaukalon kokonaistilavuus (lieriö) on

$$V_1 = A_p \cdot b.$$ 1p(2p)

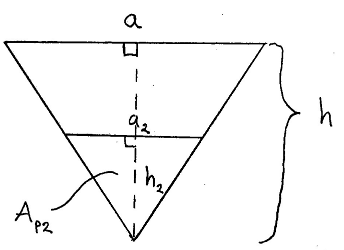
Vedestä valui siis pois

$$\begin{aligned} \frac{V_1 - V_2}{V_1} &= \frac{\cancel{A_p \cdot b} - \frac{\cancel{A_p \cdot b}}{3}}{\cancel{A_p \cdot b}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{3}}{1} \\ &= \frac{2}{3} \\ &= 0{,}666\ldots \\ &\approx \underline{\underline{66{,}7\%}}. \end{aligned}$$ 1p(3p)

b) Kohdan a perusteella tiedetään, että

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_1} &= \frac{1}{3} \\ \frac{A_{p2} \cdot \cancel{b}}{A_p \cdot \cancel{b}} &= \frac{1}{3} \\ \frac{A_{p2}}{A_p} &= \frac{1}{3} \qquad (1) \end{aligned}$$ 0.5p (3.5p)

Kun kaukalo suoristetaan, päätykolmio ja siitä veden alainen alue muodostavat yhdenmuotoiset tasasivuiset kolmiot.



Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinpinta-alojen suhde on sama kuin niiden vastinosien pituuksien neliöiden suhde, joten

$$\frac{h_2^2}{h^2} = \frac{A_{p2}}{A_p} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{h_2}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \| \cdot h$$

$$h_2 = \frac{h}{\sqrt{3}} \tag{2}$$

1p (4.5p)

Tasasivuisen kolmion korkeus on

$$h = \frac{\sqrt{3}a}{2} \tag{3}$$

0.5p (5p)

joten veden syvyys mitattuna syvimmästä kohdasta on yhtälöiden (2) ja (3) nojalla

$$h_2 = \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{\cancel{\sqrt{3}}a}{2}}{\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{a}{2}.$$

1p(6p)

Vastaus: Vedenpinta on korkeudella $\frac{a}{2}$ syvimmästä kohdasta mitattuna.

7. Tasokäyrä K muodostuu niistä pisteistä (x, y), joiden etäisyys origosta on yhtä suuri kuin etäisyys suorasta $y = 2$.

   a) Johda käyrän K yhtälölle muoto $y = f(x)$. (4 p.)

   b) Laske käyrän K ja x-akselin väliin jäävän rajoitetun tasoalueen pinta-ala. (2 p.)

Ratkaisu.

a) Pisteen (x, y) etäisyys origosta on $\sqrt{x^2 + y^2}$ ja etäisyys suorasta $y = 2$ on $|y - 2|$. Tehtävänannon mukaan nämä etäisyydet ovat yhtä suuret käyrälle K, joten

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + y^2} &= |y - 2| \quad \|(\quad)^2 && \text{1p} \\
x^2 + \cancel{y^2} &= \cancel{y^2} - 4y + 4 && \text{1p(2p)} \\
x^2 &= -4y + 4 \\
4y &= -x^2 + 4 \quad \| : 4 \\
y &= -\frac{1}{4}x^2 + 1. && \text{1p(3p)}
\end{aligned}
$$

Vastaus: $\underline{\underline{K : \quad y = -\tfrac{1}{4}x^2 + 1.}}$

b) Käyrä K on alaspäin aukeava paraabeli. Nollakohdat:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{4}x^2 + 1 &= 0 \\
\frac{1}{4}x^2 &= 1 \quad \| \cdot 4 \\
x^2 &= 4 \\
x &= \pm 2 && \text{1p(4p)}
\end{aligned}
$$

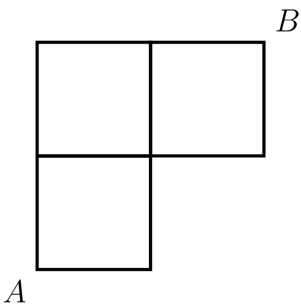
Kysytty pinta-ala on siis

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{2} -\frac{1}{4}x^2 + 1\,\mathrm{d}x \\
&= \Big/_{\!\!-2}^{\,2} \left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2+1}x^{2+1} + x\right) && \text{1p(5p)} \\
&= \Big/_{\!\!-2}^{\,2} \left(-\frac{1}{12}x^3 + x\right) \\
&= \left(-\frac{1}{12}\cdot 2^3 + 2\right) - \left(-\frac{1}{12}\cdot(-2)^3 + (-2)\right) \\
&= \frac{8}{3}. && \text{1p(6p)}
\end{aligned}
$$

Vastaus: Käyrän K ja x-akselin rajoittaman alueen pinta-ala on $\frac{8}{3}$.

8. Alla oleva kaavio esittää pienen kaupungin katuverkkoa. Anssi kulkee pisteestä A pisteeseen B käyttämällä mahdollisimman lyhyttä reittiä, jolloin matkan pituus on neljä korttelinväliä. Sellaisissa risteyksissä, joissa kaksi vahtoehtoa johtaa lyhimpään reittiin, hän valitsee suunnan kolikkoa heittämällä.

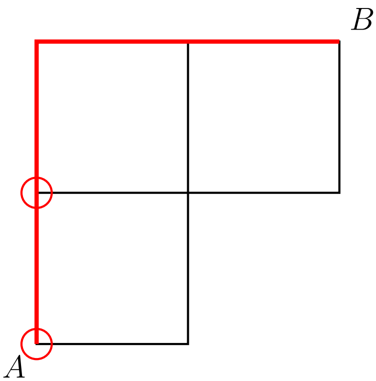
   a) Piirrä erilliset kuviot kaikista niistä viidestä mahdollisesta reitistä, joiden pituus on neljä korttelinväliä, ja määritä niiden valintatodennäköisyydet.
   b) Birgitta kulkee pisteestä B pisteeseen A ja valitsee mahdollisimman lyhyen reitin vastaavalla tavalla. Anssi ja Birgitta lähtevät liikkeelle samanaikaisesti ja kulkevat samaa vauhtia. Kuinka suurella todennäköisyydellä he kohtaavat toisensa matkan puolivälissä?



Ratkaisu.

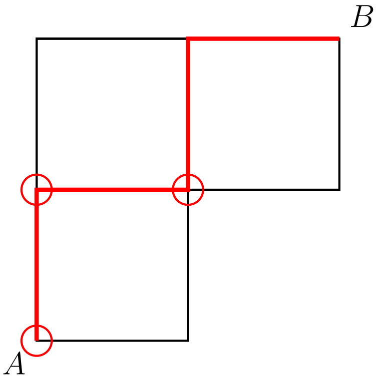
a) Merkitään ympyrällä kohta, jossa tehdään reittivalinta kahden lyhimpään reittiin johtavan suunnan välillä.

1.



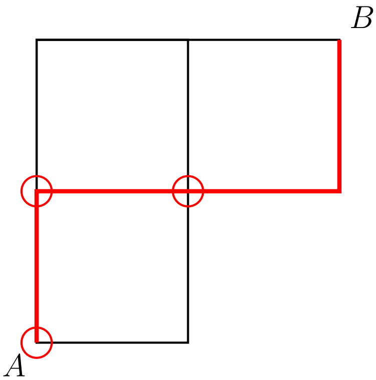
$$P(AB_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

2.



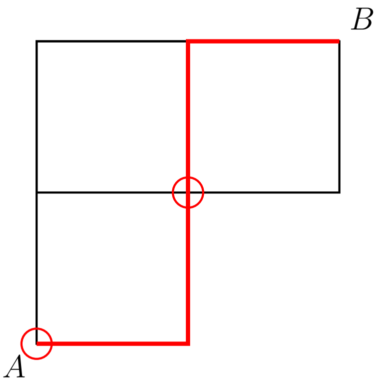
$$P(AB_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}.$$

3.



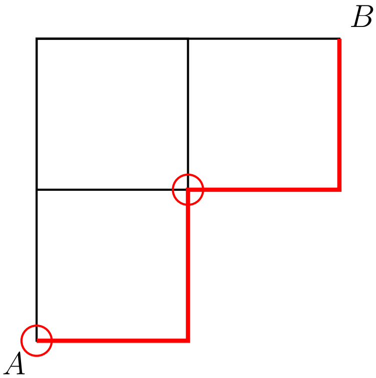
$$P(AB_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}.$$

4.



$$P(AB_4) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

5.



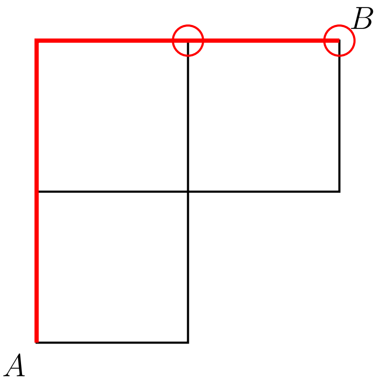
$$P(AB_5) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

3p

Pisteytys: Jokaisesta oikeinpiirretystä reitistä saa 0.2p ja jokaisesta oikein lasketusta reitin todennäköisyydestä saa 0.4p.

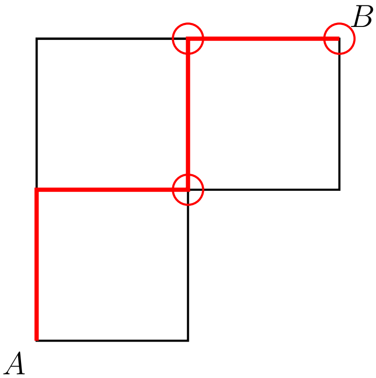
b) Piirretään Anssin reittivalintoja vastaavat Birgitan reittivalinnat reitillä pisteestä B pisteeseen A.

1.



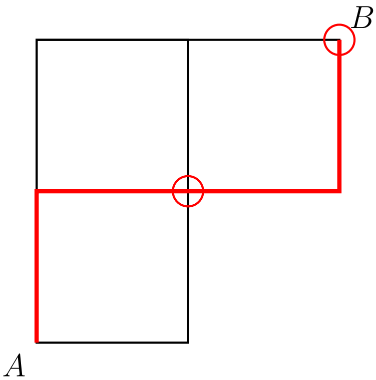
$$P(BA_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

2.



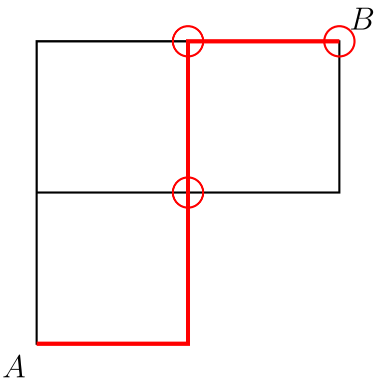
$$P(BA_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}.$$

3.



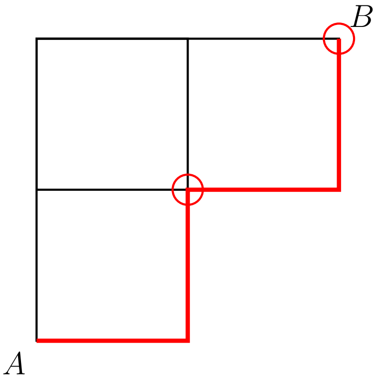
$$P(BA_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

4.



$$P(BA_4) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}.$$

5.



$$P(BA_5) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

Koska kulkunopeus ja lähtöhetki ovat samat, Birgitta ja Anssi kohtaavat, jos heidän valitsemiensa reittien puolivälit ovat samassa pisteessä. Näin on, jos kumpikin valitsee minkä tahansa reiteistä 2–5 tai molemmat valitsevat reitin 1. 1p(4p)

Kysytty todennäköisyys on siis

$$\begin{aligned} P(\text{“kohtaavat toisensa”}) &= P((AB_1 \text{ ja } BA_1) \text{ tai } (AB_{2\text{–}5} \text{ ja } BA_{2\text{–}5})) \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right) \quad \text{1p(5p)} \\ &= \frac{5}{8} \\ &= 0{,}625 \\ &= 62{,}5\% \quad \text{1p(6p)} \end{aligned}$$

Vastaus: He kohtaavat toisensa matkan puolivälissä todennäköisyydellä 62,5%.

9.1. Olkoon $n = 2, 3, 4, \ldots$ kokonaisluku. Osoita, että luku

$$n^3 + 6n^2 - 7n$$

on jaollinen luvulla 6.

Ratkaisu.

RATKAISU KONGRUENSSIN AVULLA:

$$\begin{aligned} n^3 + 6n^2 - 7n &\equiv n^3 + 0 - n \pmod 6 \\ &\equiv n(n^2 - 1) \pmod 6 \\ &\equiv n(n-1)(n+1) \pmod 6 \\ &\equiv (n-1)n(n+1) \pmod 6 \end{aligned}$$ 3p

Nyt koska $n \geq 2$, luku $(n-1)n(n+1)$ on kolmen peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun tulo. Joka kolmas luku on jaollinen kolmella, joten joko $n-1$, n tai $n+1$ on jaollinen kolmella, eli niiden tulo on myös. 1p(4p)

Toisaalta joka toinen luku on jaollinen kahdella, joten ainakin yksi luvuista on myös, eli tulo on jaollinen myös kahdella. 1p(5p)

Koska tulo on jaollinen kahdella ja kolmella, jotka ovat keskenään jaottomat, se on jaollinen myös kuudella. 1p(6p)

RATKAISU ILMAN KONGRUENSSIA:

$$\begin{aligned} n^3 + 6n^2 - 7n &= n^3 + 6n^2 - 6n - n \\ &= n^3 - n + 6(n^2 - n) \\ &= n(n^2 - 1) + 6n(n-1) \\ &= n(n-1)(n+1) + 6n(n-1) \\ &= (n-1)n(n+1) + 6n(n-1). \end{aligned}$$ 2p

Nyt koska $n \geq 2$, luku $(n-1)n(n+1)$ on kolmen peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun tulo. Joka kolmas luku on jaollinen kolmella, joten joko $n-1$, n tai $n+1$ on jaollinen kolmella, eli niiden tulo on myös. Toisaalta joka toinen luku on jaollinen kahdella, joten ainakin yksi luvuista on myös, eli tulo on jaollinen myös kahdella. Koska tulo on jaollinen kahdella ja kolmella, jotka ovat keskenään jaottomat, se on jaollinen myös kuudella. 2p(4p)

Koska $n \geq 2$, myös luku $n(n-1)$ on positiivinen kokonaisluku, joten luku $6 \cdot n(n-1)$ on jaollinen kuudella. 1p(5p)

Alkuperäinen luku on kahden kuudella jaollisen positiivisen kokonaisluvun summa, joten myös se on jaollinen kuudella. $\square$ 1p(6p)

9.2. Tarkastellaan raja-arvoa

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^n - 60x - 8}{x^2 - 4}$$

eksponentin $n = 1, 2, 3, \ldots$ eri arvoilla.

a) Osoita, että raja-arvo on olemassa, kun $n = 7$.
b) Osoita, että raja-arvoa ei ole olemassa, kun $n \neq 7$.

Ratkaisu.

a) Väite: Raja-arvo

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^7 - 60x - 8}{x^2 - 4}$$

on olemassa.

RATKAISUVAIHTOEHTO 1:

Olkoon $f(x) = x^7 - 60x - 8$. Murtolausekkeen jakaja on $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Tutkitaan lausekkeen $f(x)$ jaollisuutta $x - 2$:lla, eli etsitään jakokulman avulla sellainen polynomi $P(x)$, jolle $\frac{f(x)}{x-2} = P(x)$.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 32x + 4 \\
\hline
x - 2 & x^7 - 60x - 8 \\
 & -x^7 + 2x^6 \\
 & 2x^6 \\
 & -2x^6 + 4x^5 \\
 & 4x^5 \\
 & -4x^5 + 8x^4 \\
 & 8x^4 \\
 & -8x^4 + 16x^3 \\
 & 16x^3 \\
 & -16x^3 + 32x^2 \\
 & 32x^2 - 60x \\
 & -32x^2 + 64x \\
 & 4x - 8 \\
 & -4x + 8 \\
 & 0
\end{array}$$

Näin ollen siis polynomi $P(x) = x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 32x + 4$ 1p ja

$$
\begin{aligned}
&\frac{x^7 - 60x - 8}{x^2 - 2} \\
&= \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^7 - 60x - 8}{x-2} \\
&= \frac{1}{x+2} \cdot (x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 32x + 4) \\
&= \frac{x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 32x + 4}{x+2}
\end{aligned}
$$

0.5p (1.5p)

Nyt lausekkeen nimittäjän raja-arvo on

$$\lim_{x\to 2} x + 2 = 2 + 2 = 4 \neq 0$$

0.5p (2p)

ja polynomina myös osoittajalla on raja-arvo, 0.5p (2.5p)

joten raja-arvo

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^7 - 60x - 8}{x^2 - 4}$$

on olemassa. □ 0.5p (3p)

Ratkaisuvaihtoehto 2:

Olkoon $f(x) = x^7 - 60x - 8$ ja $g(x) = x^2 - 4$. Funktiot ovat polynomifunktioina derivoituvia kaikkialla ja

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2} x^7 - 60x - 8 \\
&= 2^7 - 60 \cdot 2 - 8 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

0.5p

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} g(x) &= \lim_{x\to 2} x^2 - 4 \\
&= 2^2 - 4 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

0.5p (1p)

Molempien funktioiden raja-arvo lähestyttäessä kohtaa $x = 2$ on siis nolla. Tutkitaan raja-arvoa

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to 2} \frac{7x^6 - 60}{2x} \\
&= \frac{7 \cdot 2^6 - 60}{2 \cdot 2} \\
&= 97.
\end{aligned}
$$

Olemassaolon osoittaminen 1p(2p)

Koska tämä raja-arvo on olemassa, l'Hôspitalin säännön nojalla 0.5p (2.5p)

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

eli myös raja-arvo

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^7-60x-8}{x^2-4}$$

on olemassa. □ 0.5p (3p)

b) Tutkitaan osoittajan $f(x)=x^n-60x-8$ raja-arvoa, kun $x\to 2$.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 2}x^n-60x-8\\&=2^n-60\cdot 2-8\\&=2^n-128.\end{aligned}$$

Tämä on nolla ainoastaan, kun $n=7$. 1p(4p)

Nimittäjä x^2-4 lähestyy a-kohdan nojalla nollaa, kun $x\to 2$. 1p(5p)

Osoittaja ei siis lähesty nollaa ja nimittäjä lähestyy, joten raja-arvoa ei ole olemassa, kun $n\neq 7$. □ 1p(6p)

10. Yhtälö $x = g(x)$ voidaan usein ratkaista *kiintopistemenetelmän* avulla. Tällöin tehdään alkuarvaus x_0 ja määritellään lukujono (x_n) käyttämällä palautuskaavaa

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad \text{kun } n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Anna seuraavien kohtien vastauksina lukujen x_{10} likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella.

a) Ratkaise yhtälö

$$x = 2 + \ln x \tag{$*$}$$

kiintopistemenetelmän avulla, kun alkuarvauksena on $x_0 = 1$.

b) Yhtälöllä $(*)$ on toinenkin ratkaisu. Muokkaa yhtälö $(*)$ eksponenttifunktion avulla toisenlaiseen kiintopistemenetelmässä käytettävään muotoon ja ratkaise se alkuarvauksella $x_0 = 1$.

Ratkaisu.

a) Ratkaistaan yhtälö $x = 2 + \ln(x)$ kiintopistemenetelmällä alkuarvauksella $x_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1\\
x_1 &= 2 + \ln(1) = 2\\
x_2 &= 2 + \ln(2) = 2{,}6931\ldots\\
x_3 &= 2 + \ln(2{,}6931\ldots) = 2{,}9907\ldots \quad \text{Iterointi}\\
&\ \vdots\\
x_{10} &= 3{,}14614\ldots \approx \underline{\underline{3{,}146}}
\end{aligned}$$

2p

1p(3p)

b) Muokataan annettua yhtälöä:

$$\begin{aligned}
x &= 2 + \ln x\\
\ln x &= x - 2
\end{aligned}$$

Logaritmin määritelmän nojalla $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$.

$$x = e^{x-2}.$$

1p(4p)

Ratkaistaan tämä kiintopistemenetelmällä alkuarvauksella $x_0 = 1$.

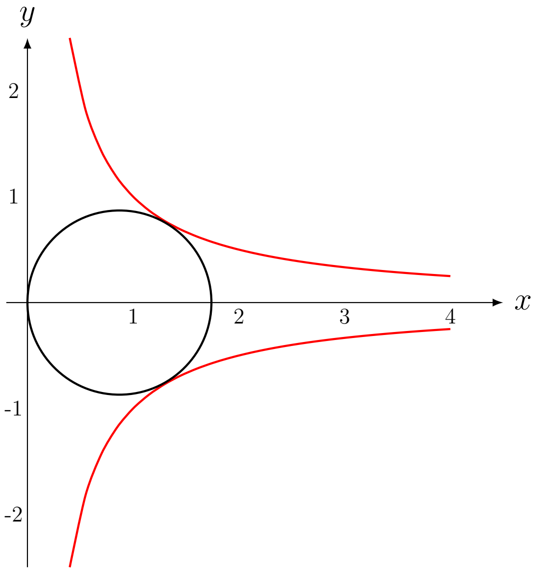
$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= e^{1-2} = 0{,}3678\ldots \\ x_2 &= e^{0{,}3678\ldots-2} = 0{,}1955\ldots \quad \text{Iterointi} \\ &\vdots \\ x_{10} &= 0{,}15859\ldots \approx \underline{\underline{0{,}159}} \end{aligned}$$

1p

1p(6p)

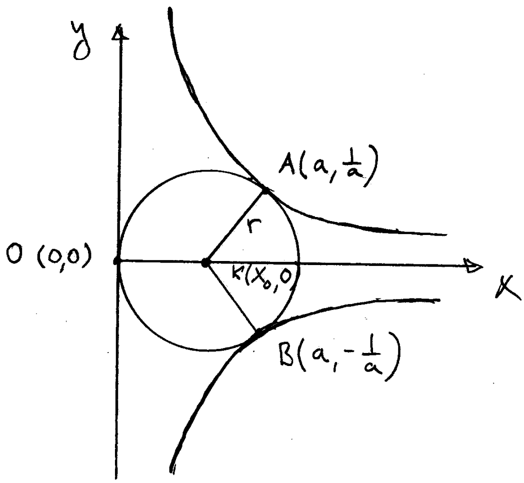
Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita koevastauksessa.

11. Ympyrä sivuaa y-akselia origossa sekä käyriä $y = \dfrac{1}{x}$ ja $y = -\dfrac{1}{x}$ alueessa $x > 0$. Määritä ympyrän säde.



Ratkaisu.

Merkitään ympyrän keskipistettä (x_0, y_0):lla ja sivuamiskohtaa käyrien $y = \frac{1}{x}$ ja $y = -\frac{1}{x}$ kanssa $x = a$:lla. Tiedetään, että $x_0 > 0$ ja $a > 0$. Symmetrian nojalla keskipiste on x-akselilla, joten $y_0 = 0$ ja ympyrän säde on $r = x_0$. 1p



Ympyrän yhtälö:

$$
\begin{aligned}
(x-x_0)^2+(y-y_0)^2&=r^2\\
(x-x_0)^2+(y-0)^2&=r^2\\
(x-x_0)^2+y^2&=r^2
\end{aligned}
$$

Ympyrä sivuaa y-akselia, joten $r=x_0$.

$$
\begin{aligned}
x^2-2xx_0+\cancel{x_0^2}+y^2&=\cancel{x_0^2}\\
x^2+y^2-2xx_0&=0 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan pisteen A koordinaatit yhtälöön (1).

$$
\begin{aligned}
a^2+\frac{1}{a^2}-2ax_0&=0\\
2ax_0&=a^2+\frac{1}{a^2} \quad \| :2a\\
x_0&=\frac{a^2+\frac{1}{a^2}}{2a}\\
x_0&=\frac{a^4+1}{2a^3} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

1.5p (2.5p)

Säde KA on kohtisuorassa käyrälle $y=\frac{1}{x}$ kohtaan $x=a$ piirrettyä tangenttia vastaan. Säteen KA suuntaisen suoran kulmakerroin on

$$
\begin{aligned}
k_r&=\frac{\frac{1}{a}-0}{a-x_0}, \quad \text{missä } a\neq x_0\\
k_r&=\frac{1}{a^2-ax_0}. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Tilannetta $a=x_0$ ei tarvitse erikseen tutkia, koska se ei ole mahdollinen. Jos olisi $a=x_0$, säde KA olisi pystysuora, ja käyrän $y=\frac{1}{x}$ tangentin täytyisi olla vaakasuora. Käyrän $y=\frac{1}{x}$ tangentti ei voi kuitenkaan olla vaakasuora, sillä sen derivaatta on negatiivinen kaikilla x.

Tangentin kulmakerroin kohdassa $x=a$ käyrälle $y=y_1(x)=\frac{1}{x}$ on

$$
k_t=y_1'(a)=-\frac{1}{a^2} \qquad (4)
$$

Kohtisuoruusehto:

$$k_t \cdot k_r = -1$$

Sijoitetaan (3) ja (4).

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^2 - a x_0} &= -1 \\ \frac{1}{a^4 - a^3 x_0} &= 1 \quad \| \cdot (a^4 - a^3 x_0) \\ a^4 - a^3 x_0 &= 1 \\ a^3 x_0 &= a^4 - 1 \quad \| : a^3 \\ x_0 &= \frac{a^4 - 1}{a^3} \end{aligned} \tag{5}$$

1.5p (4p)

Yhtälöistä (2) ja (5) saadaan:

$$\begin{aligned} \frac{a^4 + 1}{2a^3} &= \frac{a^4 - 1}{a^3} \quad \| \cdot 2a^3 \\ a^4 + 1 &= 2a^4 - 2 \\ a^4 &= 3 \\ a &= \underset{(-)}{+} \sqrt[4]{3}. \end{aligned}$$

1p(5p)

Yhtälöstä (5) saadaan ympyrän säteeksi

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\left(\sqrt[4]{3}\right)^4 - 1}{\left(\sqrt[4]{3}\right)^3} \\ &= \frac{2}{3^{\frac{3}{4}}} \\ &= 0{,}877\ldots \end{aligned}$$

Likiarvo kannatta laskea tarkistusta varten, sillä tehtävänannon kuvasta nähdään, että ympyrän säteen tulee olla hieman ykköstä pienempi.

Vastaus: Ympyrän säde on $\frac{2}{3^{\frac{3}{4}}}$.

1p(6p)

Huom! Vastaukseksi käy myös muut sievennetyt muodot, kuten esimerkiksi $\frac{2}{\sqrt[4]{3^3}}$, $\frac{2}{\sqrt[4]{3}^3}$ tai $\frac{2}{\sqrt[4]{27}}$.

Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita koevastauksessa.

12. Tehtävässä tutkitaan tason yhtälön erilaisia esitysmuotoja.

a) Tarkastellaan yhtälöä

$$\overline{N} \cdot (\overline{r} - \overline{r}_0) = 0, \qquad (*)$$

kun

$$\begin{aligned} \overline{N} &= 3\overline{i} - 2\overline{j} + 5\overline{k}, \\ \overline{r} &= x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} \quad \text{ja} \\ \overline{r}_0 &= \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}. \end{aligned}$$

Muunna yhtälö $(*)$ muotoon

$$ax + by + cz = d \qquad (**)$$

määrittämällä siinä esiintyvät vakiot a, b, c ja d.

b) Osoita, että piste $(1, 2, 3)$ toteuttaa yhtälön $(**)$ näillä vakioiden arvoilla.

c) Määritä uudet vektorit $\overline{N}$ ja $\overline{r}_0$, joilla yhtälö $2x - 5y + 7z = 14$ on yhtäpitävä muotoa $(*)$ olevan yhtälön kanssa.

Ratkaisu.

a) Sijoitetaan lausekkeet

$$\begin{aligned} \overline{N} &= 3\overline{i} - 2\overline{j} + 5\overline{k} \\ \overline{r} &= x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} \\ \overline{r}_0 &= \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k} \end{aligned}$$

Yhtälöön

$$\overline{N} \cdot (\overline{r} - \overline{r}_0).$$

Saadaan

$$\begin{aligned} (3\overline{i} - 2\overline{j} + 5\overline{k}) \cdot (x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} - \overline{i} - 2\overline{j} - 3\overline{k}) &= 0 \\ (3\overline{i} - 2\overline{j} + 5\overline{k}) \cdot [(x-1)\overline{i} + (y-2)\overline{j} + (z-3)\overline{k}] &= 0 && \text{1p} \\ 3(x-1) - 2(y-2) + 5(z-3) &= 0 \\ 3x - 3 - 2y + 4 + 5z - 15 &= 0 \\ 3x - 2y + 5z &= 14. && \text{1p(2p)} \end{aligned}$$

Vastaus: Yhtälö on kysytyssä muodossa $3x - 2y + 5z = 14.$

b) Sijoitetaan pisteen $(1, 2, 3)$ koordinaatit a-kohdan vastauksena saadun yhtälön vasemman puolen lausekkeeseen:

$$3x - 2y + 5z = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 14.$$

Kohdan a vastauksena saadun yhtälön oikea puoli on myös 14, joten piste $(1, 2, 3)$ toteuttaa a-kohdan vastauksena saadun yhtälön. 2p(4p)

c) Merkitään

$$\begin{aligned} \overline{N} &= n_x\overline{i} + n_y\overline{j} + n_z\overline{k} \\ \overline{r}_0 &= x_0\overline{i} + y_0\overline{j} + z_0\overline{k}. \end{aligned}$$

Nyt siis

$$\begin{aligned} \overline{N} \cdot (\overline{r} - \overline{r}_0) &= 0 \\ \overline{N} \cdot \overline{r} - \overline{N} \cdot \overline{r}_0 &= 0 \\ \overline{N} \cdot \overline{r} &= \overline{N} \cdot \overline{r}_0 \\ (n_x\overline{i} + n_y\overline{j} + n_z\overline{k}) \cdot (x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}) &= \overline{N} \cdot \overline{r_0} \\ n_x x + n_y y + n_z z &= \underbrace{\overline{N} \cdot \overline{r_0}}_{\text{vakio}} \qquad (1) \end{aligned}$$

Annettu yhtälö $2x - 5y + 7z = 14$ on muotoa (1), joten vasemman puolen kertoimista nähdään, että

$$\begin{cases} n_x = 2 & (2) \\ n_y = -5 & (3) \\ n_z = 7. \quad \text{Vektori } \overline{N} & (4) \end{cases}$$

1p(5p)

ja oikeasta puolesta saadaan

$$\begin{aligned} \overline{N} \cdot \overline{r}_0 &= 14 \\ (n_x\overline{i} + n_y\overline{j} + n_z\overline{k}) \cdot (x_0\overline{i} + y_0\overline{j} + z_0\overline{k}) &= 14 \\ n_x x_0 + n_y y_0 + n_z z_0 &= 14 \end{aligned}$$

Sijoitetaan tähän (2), (3) ja (4).

$$2x_0 - 5y_0 + 7z_0 = 14$$

Tämä on ensimmäisen asteen yhtälö, jossa on kolme tuntematonta. Näin ollen kaksi niistä voi olla mitä hyvänsä ja yhtälölle löytyy silti ratkaisu. Etsitään ratkaisu, kun $x_0 = y_0 = 0$.

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 7z_0 &= 14 \quad \| : 7 \\
z_0 &= 2,
\end{aligned}
$$

joten $r_0 = 2\overline{k}$. 1p(6p)

Vastaus: $\underline{\underline{\overline{N} = 2\overline{i} - 5\overline{j} + 7\overline{k} \text{ ja } \overline{r}_0 = 2\overline{k}.}}$

Huom! Värilliset tekstit ovat lisäselityksiä, joita ei vaadita koevastauksessa. Huomaa, että vektorille $\overline{r}_0$ on monta oikeaa vaihtoehtoista muotoa, jotka toteuttavat yhtälön $2x_0 - 5y_0 + 7z_0 = 14$.

13. Reaaliluku on *algebrallinen*, jos se on jonkin kokonaislukukertoimisen polynomin nollakohta. Tällaiset polynomit ovat muotoa

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

kun polynomin asteluku on $n = 1, 2, 3, \ldots$ ja kertoimet $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat kokonaislukuja. Osoita, että luku x on algebrallinen johtamalla jonkin sopivan polynomin lauseke, kun

a) $x = \frac{2}{3}$ (1 p.)
b) $x = \sqrt{3}$ (1 p.)
c) $x = 2 + \sqrt{3}$ (1 p.)
d) $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ (3 p.)

Ratkaisu.

a) Etsitään sopivaa polynomifunktiota:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{3} \quad \| \cdot 3 \\ 3x &= 2 \\ 3x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Kaikki ylläolevat yhtälöt ovat ekvivalentteja, joten sopiva polynomi on $\underline{\underline{P_a(x) = 3x - 2}}$. 1p

b) Etsitään sopivaa polynomifunktiota:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{3} \quad \|(\quad)^2 \\ x^2 &= 3 \\ x^2 - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Tarkistetaan, että $x = \sqrt{3}$ on polynomin $P_b(x) = x^2 - 3$ nollakohta.

$$P_b(\sqrt{3}) = \sqrt{3}^2 - 3 = 3 - 3 = 0.$$

Täten sopiva polynomi on $\underline{\underline{P_b(x) = x^2 - 3}}$. 1p(2p)

c) Etsitään sopivaa polynomifunktiota:

$$\begin{aligned} x &= 2 + \sqrt{3} \\ x - 2 &= \sqrt{3} \quad \|(\quad)^2 \\ x^2 - 4x + 4 &= 3 \\ x^2 - 4x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Tarkistetaan, että $x = 2 + \sqrt{3}$ on polynomin $P_c(x) = x^2 - 4x + 1$ nollakohta.

$$\begin{aligned} P_c(2+\sqrt{3}) &= (2+\sqrt{3})^2 - 4(2+\sqrt{3}) + 1 \\ &= 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 8 - 4\sqrt{3} + 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Näin ollen sopiva polynomi on $\underline{\underline{P_c(x) = x^2 - 4x + 1.}}$ 1p(3p)

d) Etsitään sopivaa polynomifunktiota:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2} + \sqrt{3} \quad \|(\quad)^2 \\ x^2 &= 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 \\ x^2 - 5 &= 2\sqrt{2 \cdot 3} \\ x^2 - 5 &= 2\sqrt{6} \quad \|(\quad)^2 \\ x^4 - 10x^2 + 25 &= 4 \cdot 6 \\ x^4 - 10x^2 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Tarkistetaan, että $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ on polynomin $P_d(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ nollakohta.

$$\begin{aligned} P_d(\sqrt{2}+\sqrt{3}) &= (\sqrt{2}+\sqrt{3})^4 - 10 \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 + 1 \\ &= (2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3)^2 - 10 \cdot (2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3) + 1 \\ &= (5 + 2\sqrt{6})^2 - 10(5 + 2\sqrt{6}) + 1 \\ &= 25 + \cancel{20\sqrt{6}} + 4 \cdot 6 - 50 - \cancel{20\sqrt{6}} + 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Täten sopiva polynomi on $\underline{\underline{P_d(x) = x^4 - 10x^2 + 1.}}$ 3p(6p)

Pisteytys: Polynomien löytämisen lisäksi täytyy perustella, että annettu x:n arvo on kyseisen polynomin nollakohta.