MAFY-VALMENNUS

MAFYNETTI

Valmistaudu pitkän- tai lyhyen matematiikan kirjoituksiin ilmaiseksi Mafynetti-ohjelmalla!

- Harjoittelu tehdään aktiivisesti tehtäviä ratkomalla. Tehtävät kattavat kaikki yo-kokeessa tarvittavat asiat.
- Lasket kynällä ja paperilla, mutta Mafynetti opettaa ja neuvoo videoiden ja ratkaisujen avulla.
- Mafynetti huolehtii kertauksesta, joten et unohda oppimiasi asioita.
- Mafynetti on nyt kokonaan ilmainen!

Lataa ilmaiseksi mafyvalmennus.fi/mafynetti

Fysiikan koe 2011

Diplomi-insinöörikoulutuksen yhteisvalinnassa

MAFY-valmennuksen mallivastaukset, 11.3.2012

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet diplomi-insinööri Antti Suominen ja filosofian maisteri Teemu Kekkonen. Antti on toiminut neljä vuotta tuntiopettajana Teknillisessä korkeakoulussa ja sen jälkeen lukiossa. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fysiikkaa. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen ja opettavat sen kaikilla kursseilla ympäri vuoden. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, matematiikan ja fysiikan valmennuskursseihin erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- TKK-pääsykoekurssit
- arkkitehtiosastojen pääsykoekurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- yksityisopetus

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:

internet:	`www.mafyvalmennus.fi`
s-posti:	`info@mafyvalmennus.fi`
puhelin:	(09) 3540 1373

A1 Täydennä kuhunkin kohtaan yhtälöstä puuttuva suure tai vakio alla olevasta taulukosta. Anna vastauksena kuhunkin kohtaan ainoastaan kirjain ja numero, esim. a4. Vastauksia ei tarvitse perustella.

a) (voima) = (?) · (kiihtyvyys)
b) (aallonpituus) = (?) · (valonnopeus) / (energia)
c) (potentiaali) = (varaus) / (4 π · (?) · (etäisyys)
d) (massa) · (putoamiskiihtyvyys) · (korkeus) = 0,5 · (?) · (kulmanopeus)^2
e) (paine) · (tilavuus) = (ainemäärä) · (?) · (lämpötila)
f) (jännite) / (virta) = (resistiivisyys) · (?) / (poikkipinta-ala)

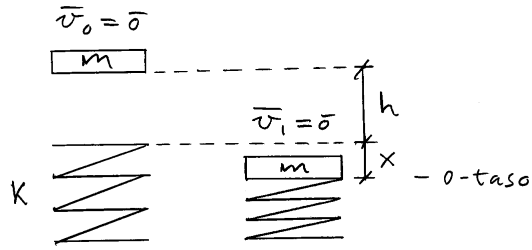
1 pituus	2 massa	3 paino
4 hitausmomentti	5 $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$	6 $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$
7 $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$	8 $R = 8{,}31\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$	9 $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$

Ratkaisu.
a) 2 (massa)
b) 6 (Planckin vakio)
c) 7 (tyhjiön permittiivisyys)
d) 4 (hitausmomentti)
e) 8 (yleinen kaasuvakio)
f) 1 (pituus)

A2 Kappale, jonka massa $m = 1{,}5\,\mathrm{kg}$, pudotetaan oheisen kuvan mukaisesti kitkattomassa tyhjiöputkessa etäisyydeltä $h = 45\,\mathrm{cm}$ pystysuoran massattoman jousen päälle, joka alkaa värähdellä. Jousen jousivakio on $k = 510\,\mathrm{N/m}$. Kappale ei pyöri.

a) Kuinka paljon jousi painuu enimmillään kokoon? (3p)
b) Putkessa avataan venttiili ja siihen päästetään ilmaa. Kuinka paljon jousi on painautunut kokoon, kun värähtely on loppunut? (3p)

Ratkaisu. a)



$$K = 510\,\mathrm{N/m} \qquad h = 0{,}45\,\mathrm{m}$$
$$m = 1{,}5\,\mathrm{kg} \qquad x = ?$$

Oletuksen mukaan kitkaa ja ilmanvastusta ei ole, joten mekaaninen energia säilyy.

$$\begin{aligned}
E_{p0} + E_{k0} &= E_{p1} + E_{k1} \\
mg(h+x) + 0\,\mathrm{J} &= \frac{1}{2}kx^2 + 0\,\mathrm{J} \\
mgh + mgx &= \frac{1}{2}kx^2 \\
\frac{1}{2}kx^2 - mgx - mgh &= 0 \\
x &= \frac{mg \pm \sqrt{(mg)^2 + 2kmgh}}{k}
\end{aligned}$$

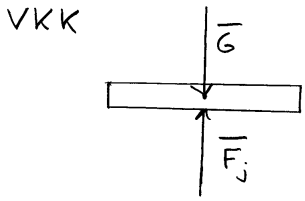
Sijoitetaan arvot

$$x = \frac{1{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \pm \sqrt{(1{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})^2 + 2 \cdot 510\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 1{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}45\,\mathrm{m}}}{510\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}$$

$$x = 0{,}19256\ldots\ \mathrm{m} \quad \text{tai} \quad (x = -0{,}1348\ldots\ \mathrm{m})$$

Vastaus: Jousi painuu enimmillään 19 cm.

b) Oletetaan, että kappaleen ja tyhjiöputken väli ei ole ilmatiivis, joten ilmaa pääsee kappaleen molemmille puolille. Näin ollen kappaleen ylä- ja alapintaan kohdistuu sama paine ja siten ilmanpaine voidaan jättää huomiotta.



$\overline{G}$ on painovoima
$\overline{F}_j$ on jousivoima

Voimatasapaino

$$\begin{aligned}
\overline{G} + \overline{F}_j &= \bar{0} \\
G - F_j &= 0 \\
mg - kx &= 0 \quad \| : k \\
x &= \frac{mg}{k} \\
x &= \frac{1{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{510\,\mathrm{N/m}} \\
x &= 2{,}885\ldots\ \mathrm{cm}
\end{aligned}$$

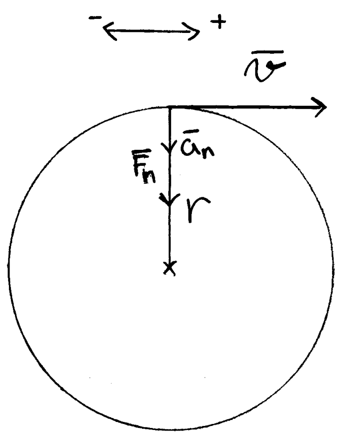
Vastaus: Kysytty painauma on 2,9 cm.

A3 Ajat autoa tasaisella asfalttikentällä ympyrärataa, jonka säde on $r = 14{,}5\,\text{m}$. Auton massa on $m = 875\,\text{kg}$ ja vauhti on vakio $v = 26\,\text{km/h}$. Pyörät eivät luista, eivätkä vedä. Kumin ja asfaltin välinen liikekitkakerroin on $\mu_k = 0{,}80$ ja lepokitkakerroin on $\mu_s = 0{,}90$.

a) Laske autoon vaikuttavan kitkavoiman suuruus. (4p)

b) Osut liukkaampaan kohtaan, jossa kitkakertoimet pienenevät arvoihin $\mu_k = 0{,}20$ ja $\mu_s = 0{,}31$. Pysyykö auto samalla ympyräradalla, kun se kulkee liukkaamman kohdan yli? (2p)

Ratkaisu. a)



Auto on ympyräradalla, joten siihen kohdistuu keskeisvoima

$$\text{NII:} \quad \overline{F}_n = m\bar{a}_n. \tag{1}$$

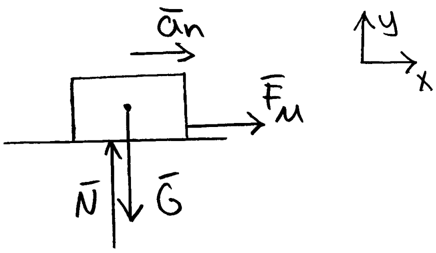
Renkaiden ja tien välinen kitkavoima on keskeisvoima, joka pitää auton ympyräradalla. Tällöin

$$\overline{F}_k = \overline{F}_\mu. \tag{2}$$

Yhdistetään yhtälöt (2) ja (1).

$$\begin{aligned}
\overline{F}_\mu &= m\bar{a}_n \\
F_\mu &= m\frac{v^2}{r} \\
&= 875\,\text{kg} \cdot \frac{\left(\frac{26}{3{,}6}\,\text{m/s}\right)^2}{14{,}5\,\text{m}} \\
&= 3147{,}616\ldots\,\text{N} \\
&\approx 3100\,\text{N}.
\end{aligned}$$

Tehtävänannossa sanotaan, että pyörät eivät luista eivätkä vedä. Koska pyörät eivät luista, on auton ympyräliikkeessä pitävä voima renkaiden ja tien välinen lepokitka. Se, että pyörät eivät vedä tarkoittaa sitä, että ainut renkaisiin kohdistuva voima on edellä määritetty keskeisvoiman suuruinen kitkavoima.
Varmistetaan, että renkaiden ja tien välinen kitkavoima on riittävän suuri pitämään auton ympyräradalla laskemalla renkaiden ja tien välisen lepokitkan maksimi.
(Huomautus lukijalle: Tätä varmistusta ei tarvitse tehdä a-kohdassa, koska oletus oli, että pyörät eivät luista. Laskelmat eivät kuitenkaan oleellisesti pitene, koska b-kohdassa näitä tietoja tarvitaan joka tapauksessa.)



y-suunnassa

$$\begin{aligned} \text{NII:} \quad \overline{N} + \overline{G} &= m\bar{a}, \quad \bar{a} = \bar{0} \\ \overline{N} + \overline{G} &= \bar{0} \\ N &= G \\ N &= mg. \end{aligned}$$

Kitkavoiman suuruus on

$$F_\mu = \mu N = \mu mg.$$

Lepokitkan maksimi on tällöin

$$F_{\mu\max} = \mu_s mg = 0{,}9 \cdot 875\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = 7725{,}37\ldots\ \mathrm{N}.$$

Auto pysyy siis ympyräradalla.

Vastaus: Kitkavoiman suuruus on 3100 N.

b) Uudet kitkakertoimet ovat

$$\mu_k = 0{,}20, \quad \mu_s = 0{,}31.$$

Lasketaan uusi lepokitkan maksimi.

$$F_{\mu\max} = \mu_s mg = 0{,}31 \cdot 875\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = 2660{,}96\ldots\ \mathrm{N}$$

Renkaiden ja tien välisen lepokitkan maksimi on pienempi kuin ympyräradalla pysymiseen vaadittavan keskeisvoiman suuruus, joten auto ei pysy samalla ympyräradalla.

A4 Alumiiniastian massa on 112 g. Astiassa on 105 g vettä lämpötilassa 20,0 °C. Astiaan lisätään 305 g jäitä (lämpötila −10,0 °C) ja 123 g lyijyä (lämpötila 235 °C). Laske loppulämpötila, kun tasapaino on saavutettu. Oletetaan, että lämpövuodot ovat vähäiset.

Ratkaisu. Tehtävän alkuarvojen perusteella voidaan pitää mahdollisena sitä, että osa jäästä jää sulamatta. Lähdetään ensin tutkimaan tätä mahdollisuutta, koska jos näin on, jäävät laskut selvästi yksinkertaisemmiksi. Jos osa jäästä jää sulamatta, niin lopputilanteessa kaikkien aineiden lämpötilat ovat 0 °C.

$$\begin{aligned}
c_v &= 4{,}19 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}}, & m_v &= 0{,}105\,\mathrm{kg}, & T_v &= 20\,^\circ\mathrm{C},\\
c_{\mathrm{Al}} &= 0{,}90 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}}, & m_{\mathrm{Al}} &= 0{,}112\,\mathrm{kg}, & T_{\mathrm{Al}} &= 20\,^\circ\mathrm{C},\\
c_{\mathrm{Pb}} &= 0{,}128 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}}, & m_{\mathrm{Pb}} &= 0{,}123\,\mathrm{kg}, & T_{\mathrm{Pb}} &= 235\,^\circ\mathrm{C},\\
c_j &= 2{,}09 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}}, & m_j &= 0{,}305\,\mathrm{kg}, & T_j &= -10\,^\circ\mathrm{C},\\
& & & & s &= 333 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}
\end{aligned}$$

Lasketaan, kuinka paljon astiasta, lyijykappaleesta ja vedestä vapautuu energiaa jään lämmittämiseen ja sulattamiseen, kun ne jäähtyvät 0 °C:een.

$$\begin{aligned}
Q_1 &= c_v m_v \Delta T_v + c_{\mathrm{Al}} m_{\mathrm{Al}} \Delta T_{\mathrm{Al}} + c_{\mathrm{Pb}} m_{\mathrm{Pb}} \Delta T_{\mathrm{Pb}}\\
&= 4{,}19 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 0{,}105\,\mathrm{kg} \cdot 20\,^\circ\mathrm{C} + 0{,}9 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 0{,}112\,\mathrm{kg} \cdot 20\,^\circ\mathrm{C}\\
&\quad + 0{,}128 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 0{,}123\,\mathrm{kg} \cdot 235\,^\circ\mathrm{C}\\
&= 14{,}514\ldots \cdot 10^3\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

Lasketaan, kuinka paljon lämpöenergiaa jää jään sulattamiseen sen jälkeen, kun jää on lämmennyt 0 °C:een.

$$\begin{aligned}
Q_2 &= Q_1 - C_j m_j \Delta T_j, \quad \Delta T_j = 10\,^\circ\mathrm{C}\\
&= 14{,}514\ldots \cdot 10^3 - 2{,}09 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} \cdot 0{,}305\,\mathrm{kg} \cdot 10\,^\circ\mathrm{C}\\
&= 8{,}14034\ldots \cdot 10^3\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

Lasketaan jään sulattamiseen tarvittava nergia.

$$Q_3 = s m_j = 333 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} \cdot 0{,}305\,\mathrm{kg} = 101{,}565 \cdot 10^3\,\mathrm{J}$$

Koska $Q_3 > Q_2$, tarvitaan jään sulattamiseen enemmän energiaa, kuin vedestä, astiasta ja lyijystä vapautuu.
Jäätä jää siten sulamatta. Koska osa jäästä sulaa, on loppulämpötila 0 °C.

A5 Kondensaattori 1, jonka kapasitanssi on 3,2 µF, varataan siten, että sen jännitteeksi tulee 4,5 V.

a) Laske kondensaattorin 1 varaus. (2p)
b) Varattu kondensaattori kytketään sarjaan varaamattoman kondensaattorin kanssa ja sitten sarjaankytkennän vapaina olevat päät oikosuljetaan. Laske, mikä kondensaattorin 1 jännitteeksi muodostuu, kun toisen kondensaattorin kapasitanssi on 4,7 µF. Piirrä kytkentä ja merkitse kytkentään kondensaattorilevyjen varausten merkit lopputilassa. (4p)

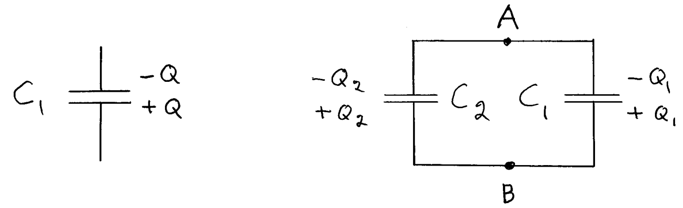
Ratkaisu. a) $C_1 = 3{,}2\,\mu\mathrm{F} = 3{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}$, $U_1 = 4{,}5\,\mathrm{V}$
Kondensaattorilain mukaan varaus on

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_1 U_1 \\ Q_1 &= 3{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F} \cdot 4{,}5\,\mathrm{V} \\ &= 1{,}44 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{C} \\ &\approx 14\,\mu\mathrm{F}. \end{aligned}$$

Vastaus: Varaus on 14 µF.

b)

alussa lopussa



$C_1 = 3{,}2\,\mu\mathrm{F}$ $C_2 = 4{,}7\,\mu\mathrm{F}$
$Q = 14{,}4\,\mu\mathrm{C}$

Alussa kondensaattorin 1 varaus on Q. Kun kondensaattori 2 kytketään sarjaan kondensaattorin 1 kanssa, niin elektronit alkavat siirtymään kondensaattorin 1 negatiivisesti varatusta levystä siihen kondensaattorin 2 levyyn, johon johdin A on kytketty. Kyseinen levy saa negatiivisen varauksen Q_2. Kun riittävä määrä varausta on siirtynyt, niin kondensaattorien jännitteet asettuvat sellaisiksi, että saavutetaan tasapaino ja virta lakkaa kulkemasta piirissä. Selvitetään varaukset ja jännitteet tasapainotilassa.

Kondensaattorin levyt on aina eristetty toisistaan, joten varaukset eivät voi siirtyä piirin osien A ja B välillä. Osa A tarkoittaa kondensaattorien ylempiä levyjä ja johdinta A. Osa B tarkoittaa alempia levyjä ja johdinta B. Kuten edellä on selitetty, kaikki piirin osassa B oleva varaus on peräisin kondensaattorin 1 positiivisesti varatulta levyltä. Varauksen säilymislaista seuraa, että

$$Q_1 + Q_2 = Q. \tag{1}$$

Toisaalta kondensaattorilain mukaan

$$Q_1 = C_1U_1 \quad \text{ja} \tag{2}$$
$$Q_2 = C_2U_2. \tag{3}$$

Kondensaattorien navat on kytketty samoihin pisteisiin A ja B, joten

$$U_1 = U_2 = U_{\mathrm{BA}}. \tag{4}$$

Sijoitetaan (2) ja (3) yhtälöön (1).

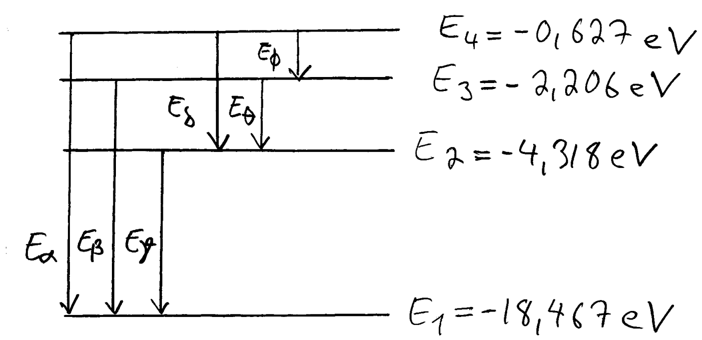
$$\begin{aligned}
C_1U_1 + C_2U_2 &= Q \quad \| \,\text{sij. } (4)\\
C_1U_1 + C_2U_1 &= Q \quad \| : (C_1 + C_2)\\
U_1 &= \frac{Q}{C_1 + C_2}\\
U_1 &= \frac{14{,}4\,\mu\mathrm{F}}{3{,}2\,\mu\mathrm{F} + 4{,}5\,\mu\mathrm{F}}\\
U_1 &= 1{,}8227\ldots\ \mathrm{V}\\
&\approx 1{,}8\,\mathrm{V}
\end{aligned}$$

Vastaus: Kysytty jännite on 1,8 V.

A6 Kuvitteellisen yksielektronisen atomin neljä alinta energiatilaa ovat $E_1 = -18{,}467\,\text{eV}$, $E_2 = -4{,}318\,\text{eV}$, $E_3 = -2{,}206\,\text{eV}$ ja $E_4 = -0{,}627\,\text{eV}$. Atomi on aluksi jollain viritystiloistaan. Virittynyt atomi emittoi keltaista valoa (valo on keltaista, jos aallonpituus on välillä 560–590 nm).

a) Määritä emittoituneen valon tarkka aallonpituus. (4p)
b) Piirrä atomin energiatasokaavio ja siihen emissiota vastaava siirtymä. (2p)

Ratkaisu. a)



Atomi emittoi sähkömagneettista säteilyä, kun elektroni putoaa korkeammalta energiatilalta alemmalle energiatilalle. Syntyvän säteilyn energia on energiatilojen erotuksen suuruinen.
Lasketaan mahdolliset emittoituvan säteilyn energiat.

$$\begin{aligned}
E_\alpha &= E_4 - E_1 = -0{,}627\,\text{eV} - (-18{,}467\,\text{eV}) = 17{,}84\,\text{eV} \\
E_\beta &= E_3 - E_1 = 16.261\,\text{eV} \\
E_\gamma &= E_2 - E_1 = 14{,}149\,\text{eV} \\
E_\delta &= E_4 - E_2 = 3{,}691\,\text{eV} \\
E_\theta &= E_3 - E_2 = 2{,}112\,\text{eV} \\
E_\phi &= E_4 - E_3 = 1{,}579\,\text{eV}
\end{aligned}$$

Sähkömagneettisen säteilyn energia on

$$E = \frac{hc}{\lambda} \quad \Big\| \cdot \frac{\lambda}{E}$$

$$\lambda = \frac{hc}{E}. \tag{1}$$

Muunnetaan annettu Planckin vakio

$$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\text{Js}$$

yksikköön eVs:

$$h = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}} \,\text{eVs} = 4{,}13607\ldots \cdot 10^{-15}\,\text{eVs}.$$

Lasketaan emittoituvat säteilyn aallonpituudet kaavan (1) mukaisesti lähtien pienimmästä energiasta E_ϕ.

$$\begin{aligned}
\lambda_\phi &= \frac{hc}{E_\phi} \\
&= \frac{4{,}136\ldots \cdot 10^{-15}\,\text{eVs} \cdot 2{,}998 \cdot 10^{8}\,\text{m/s}}{1{,}579\,\text{eV}} \\
&= 7{,}853\ldots \cdot 10^{-7}\,\text{m} \\
&\approx 785\,\text{nm} \\
\lambda_\theta &= 5{,}8711\ldots \cdot 10^{-7}\,\text{m} \\
&\approx 587\,\text{nm} \\
\lambda_\delta &= 3{,}3595\ldots \cdot 10^{-7}\,\text{m} \\
&\approx 336\,\text{nm}
\end{aligned}$$

Aallonpituus, joka vastaa keltaista valoa on $\lambda_\theta = 587\,\text{nm}$.

Vastaus: Emittoituneen valon aallonpituus on 587 nm.

b) Piirretään atomin elektronin energiatasokaavio: