MAFY-VALMENNUS

MAFYNETTI

Valmistaudu pitkän- tai lyhyen matematiikan kirjoituksiin ilmaiseksi Mafynetti-ohjelmalla!

- Harjoittelu tehdään aktiivisesti tehtäviä ratkomalla. Tehtävät kattavat kaikki yo-kokeessa tarvittavat asiat.
- Lasket kynällä ja paperilla, mutta Mafynetti opettaa ja neuvoo videoiden ja ratkaisujen avulla.
- Mafynetti huolehtii kertauksesta, joten et unohda oppimiasi asioita.
- Mafynetti on nyt kokonaan ilmainen!

Lataa ilmaiseksi mafyvalmennus.fi/mafynetti

Matematiikan koe 2009

Diplomi-insinöörikoulutuksen yhteisvalinnassa

MAFY-valmennuksen mallivastaukset, 14.1.2012

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet diplomi-insinööri Antti Suominen ja filosofian maisteri Teemu Kekkonen. Antti on toiminut neljä vuotta tuntiopettajana Teknillisessä korkeakoulussa ja sen jälkeen lukiossa. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fysiikkaa. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen ja opettavat sen kaikilla kursseilla ympäri vuoden. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, matematiikan ja fysiikan valmennuskursseihin erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- TKK-pääsykoekurssit
- arkkitehtiosastojen pääsykoekurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- yksityisopetus

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:

internet:	www.mafyvalmennus.fi
s-posti:	info@mafyvalmennus.fi
puhelin:	(09) 3540 1373

A1. Kokonaistuotanto jaetaan materian ja palveluiden tuotantoon. Verrataan tuotantoa tammikuussa 2008 tammikuuhun 2009. Tänä vuoden pituisen tarkastelujakson aikana materiatuotanto kasvoi 2,0 % ja palvelutuontanto laski 7,0 %.

Kuinka suuri oli materiatuotannon osuus kokonaistuotannosta tammikuussa 2009,

a) kun tammikuussa 2008 materia- ja palvelutuotanto olivat yhtäsuuret?
b) kun vertailuaikana kokonaistuotanto laski 2,0 %.

Anna kummatkin vastaukset 0,1 %-yksikön tarkkuuteen pyöristettynä.

Ratkaisu
Merkitään
m on materiaalituotannon määrä
p on palvelutuotannon määrä

Tuotannon määrät tammikuussa 2009 olivat molemmissa skenaarioissa

$$m_{09} = 1{,}02 m_{08} \text{ ja } p_{09} = 0{,}93 p_{08} \tag{1}$$

Materiatuotannon osuus kokonaistuotannosta tammikuussa 2009 oli

$$\frac{m_{09}}{m_{09} + p_{09}} = \frac{1{,}02 m_{08}}{1{,}02 m_{08} + 0{,}93 p_{08}} \tag{2}$$

a) Osuudet tuotannosta olivat yhtä suuret vuonna 2008, joten sijoitetaan edelliseen $p_{08} = m_{08}$, saadaan

$$\frac{1{,}02 m_{08}}{1{,}02 m_{08} + 0{,}93 m_{08}} = \frac{1{,}02 \cancel{m_{08}}}{1{,}95 \cancel{m_{08}}} = 0{,}52307\ldots \approx 0{,}523$$

V: 52,3 %

b) Vertailuaikana kokonaistuotanto laski 2,0 %, joten saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}
\frac{m_{09} + p_{09}}{m_{08} + p_{08}} &= 0{,}98 \quad \| \text{ Sijoitetaan yhtälö (1)} \\
\frac{1{,}02 m_{08} + 0{,}93 p_{08}}{m_{08} + p_{08}} &= 0{,}98 \quad \| \cdot (m_{08} + p_{08}) \\
1{,}02 m_{08} + 0{,}93 p_{08} &= 0{,}98 m_{08} + 0{,}98 p_{08} \\
-0{,}05 p_{08} &= -0{,}04 m_{08} \quad \| : (-0{,}05) \\
p_{08} &= 0{,}8 m_{08} \qquad (3)
\end{aligned}$$

Sijoitetaan (3) yhtälöön (2), niin saadaan osuudeksi

$$\frac{1{,}02 m_{08}}{1{,}02 m_{08} + 0{,}93 \cdot 0{,}8 m_{08}} = \frac{1{,}02 m_{08}}{1{,}02 m_{08} + 0{,}744 m_{08}} = \frac{1{,}02 \cancel{m_{08}}}{1{,}764 \cancel{m_{08}}} = 0{,}5782\ldots \approx 0{,}578$$

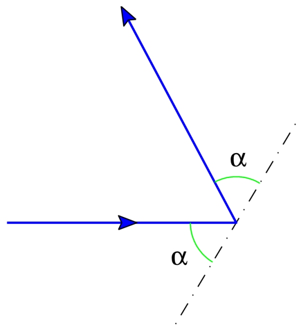
V: 57,8 %

A2. Valonsäde kulkee x-akselia pitkin positiiviseen suuntaan. Säde heijastuu suorasta $y = k(x - 3), k \neq 0$. Säde kulkee suoraan, paitsi heijastuessaan; hejastuessa tulo- ja lähtökulma ovat yhtäsuuret (vertaa kuva).

a) Millä k:n arvoilla heijastunut valonsäde leikkaa y-akselin?

b) Missä pisteessä, jos missään, heijastunut valonsäde leikkaa y-akselin, kun $k = 2$?

Anna a-kohdassa tarkka vastaus ja b-kohdassa likiarvo neljällä desimaalilla.

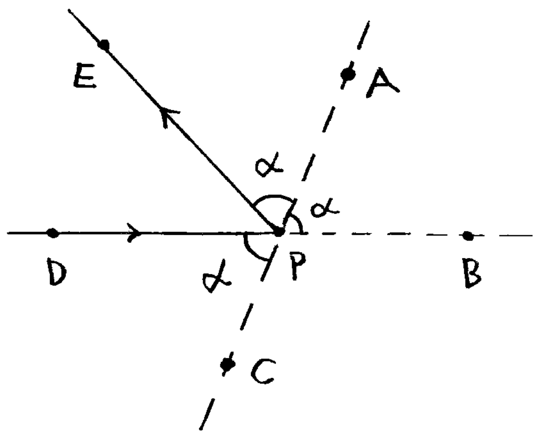


Ratkaisu

a) Tutkitaan, missä pisteessä x-akselia pitkin tuleva valonsäde kohtaa suoran $y = k(x - 3)$. Merkitään pistettä $(x_0, 0)$:lla, jolloin saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} 0 &= k\,(x_0 - 3) \quad \| : k \\ 0 &= x_0 - 3 \\ x_0 &= 3 \end{aligned}$$

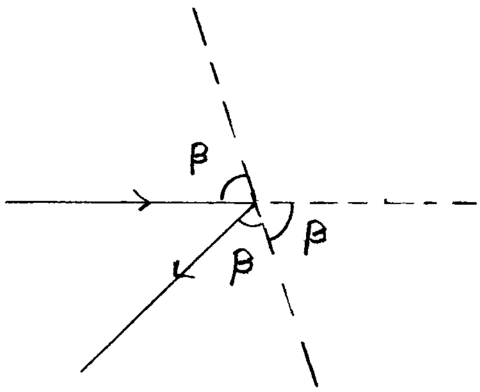
Valonsäde siis kohtaa heijastavan suoran pisteessä $(3, 0)$ riippumatta k:n arvosta. Tutkitaan aluksi tilannetta, jossa $k > 0$, ja näin ollen heijastava suora on nouseva. Alla on kuva tilanteesta.



Kuvassa heijastavan suoran suuntakulmaa APB on merkitty α:lla. Tulokulma CPD on kulman APB ristikulma, joten $\sphericalangle CPD = \sphericalangle APB = \alpha$. Heijastuskulma on yhtä suuri kuin tulokulma, joten myös sen suuruus on α. y-akseli on kuvassa vasemmalla, joten heijastunut valonsäde leikkaa y-akselin, jos se lähtee x-akselin negatiiviseen suuntaan. Näin käy jos $2\alpha > 90°$, eli

$$\begin{aligned} \alpha &> 45° \quad \| \tan(), \text{ tan on aidosti kasvava funktio} \\ \tan\alpha &> \tan 45° \\ \tan\alpha &> 1 \end{aligned}$$

Suoran kulmakertoimella ja suuntakulmalla on yhteys $k = \tan\alpha$, joten viimeinen yhtälö tarkoittaa, että $k > 1$.
Tutkitaan vielä tilanne, kun $k < 0$, jolloin suora on laskeva. Alla on kuva tilanteesta.



Heijastavan suoran suuntakulma on $-\beta$. Kuten edellä saadaan nyt

$$\begin{aligned} 2\beta &> 90° \quad \| : 2 \\ \beta &> 45° \quad \| \tan(), \text{ tan on aidosti kasvava funktio} \\ \tan\beta &> \tan 45° \\ \tan\beta &> 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Suoran kulmakertoimella ja suuntakulmalla $-\beta$ on yhteys

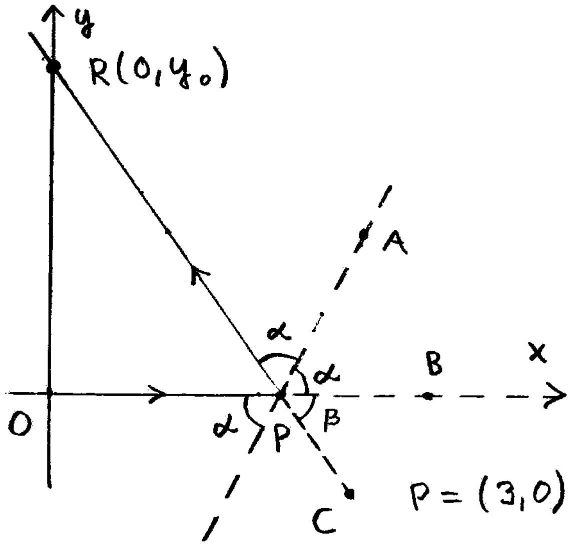
$$\begin{aligned} \tan(-\beta) &= k \\ -\tan\beta &= k \quad \| \cdot (-1) \\ \tan\beta &= -k \end{aligned}$$

Sijoitetaan edellinen epäyhtälöön (1), saadaan

$$\begin{aligned} -k &> 1 \quad \| : (-1) \\ k &< -1 \end{aligned}$$

V: $k < -1$ tai $k > 1$

b) Kulmakerroin $k = 2$ toteuttaa a-kohdassa saadun ehdon, joten heijastunut valonsäde leikkaa y-akselin. Tilanne on esitetty alla olevassa kuvassa.



Kulma α on heijastavan suoran suuntakulma ja muut yhtäsuuret kulmat voidaan päätellä kuten a-kohdassa. Suuntakulmalle pätee

$$\begin{aligned}\tan\alpha &= k\\ \tan\alpha &= 2\\ \alpha &= 63{,}434\ldots^\circ\end{aligned}$$

Jana CP on taittuneen valonsäteen jatke. Kulmat APR, APB ja BPC muodostavat oikokulman, joten niiden summa

$$\begin{aligned}\alpha+\alpha+\beta &= 180^\circ\\ \beta &= 180^\circ - 2\alpha\\ \beta &= 180^\circ - 2\cdot 63{,}434\ldots^\circ = 53{,}130\ldots^\circ\end{aligned}$$

Toisaalta ristikulma $\sphericalangle OPR = \sphericalangle BPC = \beta$. Edelleen suorakulmaiselle kolmiolle OPR pätee

$$\begin{aligned}\tan\sphericalangle OPR &= \frac{OR}{OP} \quad \| \text{ Sij. } OR = y_0,\ OC = 3 \text{ ja } \sphericalangle OPR = \beta\\ \tan\beta &= y_0/3 \quad \| \cdot 3\\ y_0 &= 3\tan\beta \quad \| \text{ Sij. } \beta = 53{,}130\ldots^\circ\\ y_0 &= 4\end{aligned}$$

V: Heijastunut valonsäde leikkaa y-akselin pisteessä $(0,4)$

A3. Määrää käyrien $y = x^3 - ax$ ja $y = (a-1)x^2$ rajoittaman äärellisen alueen pinta-ala,

a) kun $a = 0$.

b) kun $a > 0$.

Ratkaisu
a) Merkitään

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - ax = x^3 \\ g(x) &= (a-1)x^2 = -x^2 \end{aligned}$$

Käyrien leikkauspisteet

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^3 &= -x^2 \\ x^3 + x^2 &= 0 \\ x^2(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Tulon nollasäännön mukaan

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = -1$$

Käyrien rajoittama pinta-ala

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{0} [f(x) - g(x)]\, dx \\ &= \int_{-1}^{0} \left[x^3 - \left(-x^2\right)\right] dx \\ &= \int_{-1}^{0} \left(x^3 + x^2\right) dx \\ &= \Big/_{\!\!-1}^{\,0} \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right) \\ &= 0 - \left[\frac{1}{4}\cdot(-1)^4 + \frac{1}{3}\cdot(-1)^3\right] \\ &= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

V: Pinta-ala on $\frac{1}{12}$

b) Merkitään

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - ax \\ g(x) &= (a-1)x^2 \end{aligned}$$

Käyrien leikkauspisteet

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^3 - ax &= (a-1)x^2 \\ x^3 - (a-1)x^2 - ax &= 0 \\ x\left(x^2 - (a-1)x - a\right) &= 0 \end{aligned}$$

Tulon nollasäännön mukaan

$$x = 0$$

tai

$$\begin{aligned} x^2 - (a-1)x - a = 0 \\ x &= \frac{a - 1 \pm \sqrt{(a-1)^2 + 4a}}{2} \\ &= \frac{a - 1 \pm \sqrt{a^2 - 2a + 1 + 4a}}{2} \\ &= \frac{a - 1 \pm \sqrt{a^2 + 2a + 1}}{2} \\ &= \frac{a - 1 \pm (a+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{a - 1 + a + 1}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{a - 1 - a - 1}{2} \\ x &= a \qquad\qquad\quad \text{tai} \quad x = -1 \end{aligned}$$

Leikkauspisteet ovat kohdissa $x = -1$, $x = 0$ ja $x = a$, jossa $a > 0$. Käyrien rajoittaman alueen pinta-ala on

$$\int_{-1}^{a} |f(x) - g(x)| \, dx.$$

Selvitetään funktion $f(x) - g(x)$ merkki väleillä $]-1, 0[$ ja $]0, a[$. Kohdassa $x = -\frac{1}{2}$

saadaan

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{1}{2}\right)-g\left(-\frac{1}{2}\right)&=\left(-\frac{1}{2}\right)^3-a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-(a-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^2\\
&=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}a-(a-1)\cdot\frac{1}{4}\\
&=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}\\
&=\frac{1}{4}a+\frac{1}{8}>0,\text{ koska } a>0.
\end{aligned}$$

Kohdassa $x=\frac{a}{2}$ saadaan

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a}{2}\right)-g\left(\frac{a}{2}\right)&=\left(\frac{a}{3}\right)^3-a\cdot\frac{a}{2}-(a-1)\left(\frac{a}{2}\right)^2\\
&=\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{2}a^2-(a-1)\cdot\frac{1}{4}a^2\\
&=\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{4}a^3+\frac{1}{4}a^2\\
&=-\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{4}a^2<0,\text{ koska } a>0.
\end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned}
A&=\int_{-1}^{a}|f(x)-g(x)|\,dx\\
&=\int_{-1}^{0}[f(x)-g(x)]\,dx+\int_{0}^{a}-[f(x)-g(x)]\,dx\\
&=\int_{-1}^{0}[f(x)-g(x)]\,dx-\int_{0}^{a}[f(x)-g(x)]\,dx\\
&=\int_{-1}^{0}\left[x^3-ax-(a-1)x^2\right]dx-\int_{0}^{a}\left[x^3-ax-(a-1)x^2\right]dx\\
&=\Big/_{\!-1}^{0}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{2}x^2-\frac{a-1}{3}x^3\right)-\Big/_{\!0}^{a}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{2}x^2-\frac{a-1}{3}x^3\right)\\
&=0-\left[\frac{1}{4}(-1)^4-\frac{a}{2}(-1)^2-\frac{a-1}{3}(-1)^3\right]-\left[\frac{1}{4}a^4-\frac{a}{2}\cdot a^2-\frac{a-1}{3}a^3-0\right]\\
&=-\left[\frac{1}{4}-\frac{a}{2}+\frac{a-1}{3}\right]-\left[\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{3}a^4+\frac{1}{3}a^3\right]\\
&=-\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}\right]-\left[-\frac{1}{12}a^4-\frac{1}{6}a^3\right]\\
&=-\left[-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}a\right]+\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{6}a^3\\
&=\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{6}a+\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

$\underline{\underline{\text{V: Pinta-ala on } \frac{1}{12}a^4+\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{6}a+\frac{1}{12}}}$

A4. Merkitään $f(t)$:llä erään aineen pitoisuutta näytteessä ajan hetkellä $t > 0$. Oletetaan, että pitoisuus vaihtelee mallin $f(t) = at^b$ mukaan, missä a ja b ovat tuntemattomia ajasta riippumattomia vakioita. Mikä on oletetun mallin mukaan aineen pitoisuus hetkellä $t = 3$, kun tiedetään pitoisuudet $f(2) = 7$ ja $f(5) = 3$?

Anna vastauksena pitoisuuden tarkka arvo ja sen likiarvo kolmen desimaalin tarkkuuteen pyöristettynä.

Ratkaisu
Oletettu malli on $f(t) = at^b$. Annetuista pitoisuuksista hetkillä $t = 2$ ja $t = 5$ saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} f(2) = 7 \\ f(5) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 2^b = 7 & (1) \\ a \cdot 5^b = 3 & (2) \end{cases}$$

Yhtälöstä (1) saadaan

$$\begin{aligned} a \cdot 2^b &= 7 \quad \| : 2^b \\ a &= \frac{7}{2^b} \qquad (3) \end{aligned}$$

Sijoitetaan (3) yhtälöön (2), saadaan

$$\begin{aligned} \frac{7}{2^b} \cdot 5^b &= 3 \quad \| : 7 \\ \frac{5^b}{2^b} &= \frac{3}{7} \\ \left(\frac{5}{2}\right)^b &= \frac{3}{7} \quad \| \ln() \\ \ln\left(\frac{5}{2}\right)^b &= \ln\frac{3}{7} \\ b\ln\frac{5}{2} &= \ln\frac{3}{7} \quad \| : \ln\frac{5}{2} \\ b &= \frac{\ln\frac{3}{7}}{\ln\frac{5}{2}} \qquad (4) \end{aligned}$$

Sijoitetaan (4) yhtälöön (3), saadaan

$$a = \frac{7}{2^{\frac{\ln\frac{3}{7}}{\ln\frac{5}{2}}}} \qquad (5)$$

Nyt saadaan

$$\begin{aligned} f(3) &= a \cdot 3^b \quad \| \text{ Sijoitetaan (4) ja (5)} \\ &= \frac{7}{2^{\frac{\ln \frac{3}{7}}{\ln \frac{5}{2}}}} \cdot 3^{\frac{\ln \frac{3}{7}}{\ln \frac{5}{2}}} \\ &= 7 \cdot \frac{3^{\frac{\ln \frac{3}{7}}{\ln \frac{5}{2}}}}{2^{\frac{\ln \frac{3}{7}}{\ln \frac{5}{2}}}} \\ &= 7 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\ln \frac{3}{7}}{\ln \frac{5}{2}}} \\ &\approx 4{,}811 \end{aligned}$$

V: Pitoisuus hetkellä $t = 3$ on $7 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\ln \frac{3}{7}}{\ln \frac{5}{2}}} \approx 4{,}811$

A5. Tarkastellaan lukujonoa

$$a_n = n^{2010}/e^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Monesko lukujonon jäsen on suurin, vai onko suurinta ollenkaan? Perustele väitteesi täsmällisesti.

Ratkaisu
Tutkitaan millä n:n arvoilla lukujonon jäsen on suurempi kuin edellinen.

$$\begin{aligned}
a_n &> a_{n-1} \\
\frac{n^{2010}}{e^n} &> \frac{(n-1)^{2010}}{e^{n-1}} \quad \| \cdot \frac{e^n}{(n-1)^{2010}} \\
\frac{n^{2010}}{(n-1)^{2010}} &> \frac{e^n}{e^{n-1}} \\
\left(\frac{n}{n-1}\right)^{2010} &> e \quad \|()^{\frac{1}{2010}} \\
\frac{n}{n-1} &> e^{\frac{1}{2010}} \quad \| \cdot (n-1) \\
n &> (n-1)e^{\frac{1}{2010}} \\
n &> ne^{\frac{1}{2010}} - e^{\frac{1}{2010}} \\
n - ne^{\frac{1}{2010}} &> -e^{\frac{1}{2010}} \\
n\left(1 - e^{\frac{1}{2010}}\right) &> -e^{\frac{1}{2010}} \quad \| : \left(1 - e^{\frac{1}{2010}}\right), \ \left(1 - e^{\frac{1}{2010}}\right) \approx -0{,}000498 < 0 \\
n &< \frac{-e^{\frac{1}{2010}}}{1 - e^{\frac{1}{2010}}} \\
n &< 2010{,}500041\ldots
\end{aligned}$$

Suurin kokonaisluku, joka toteuttaa viimeisen epäyhtälön on $n = 2010$. Ensimmäinen epäyhtälö on yhtäpitävä viimeisen kanssa, joten 2010 on suurin kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön $a_n > a_{n-1}$. Jokainen lukujonon jäsen on siis edellistä suurempi jäseneen a_{2010} asti. Sen jälkeen mikään lukujonon jäsen ei ole edellistä suurempi. Näin ollen jäsenellä a_{2010} on lukujonon suurin arvo.

Osoitetaan vielä, että kaikki jäsenet a_n, kun $n > 2010$ ovat pienempiä kuin a_{2010}. Epäyhtälöstä $a_n < a_{n-1}$ seuraa vastaavien välivaiheiden jälkeen kuin edellä, että $n > 2010{,}500041\ldots$. Pienin kokonaisluku, joka toteuttaa tämän ehdon on $n = 2011$. Lukujonon jäsenet ovat siis edellistä pienempiä jäsenestä a_{2011} alkaen. Näin ollen jäsen a_{2010} on ainoa lukujonon jäsen, jolla on suurin arvo ja se on siis lukujonon suurin jäsen.

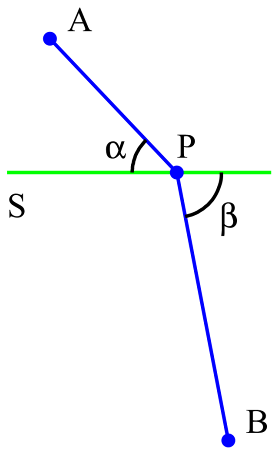
Suurin lukujonon jäsen on siis olemassa ja se on 2010:s jäsen.

A6. Tarkastellaan kuvan mukaista tilannetta. Suora S edustaa rantaviivaa, joka olkoon koordinaatiston x-akselilla. Pisteessä $A = (0, a)$ oleva uimavalvoja havaitsee pisteessä $B = (c, -b)$ hädässä olevan uimarin ($a, b, c > 0$). Uimavalvoja juoksee vauhdilla v_1 suoraan rannalle pisteeseen P ja ui sieltä suoraan vauhdilla v_2 hukkuvan luo.

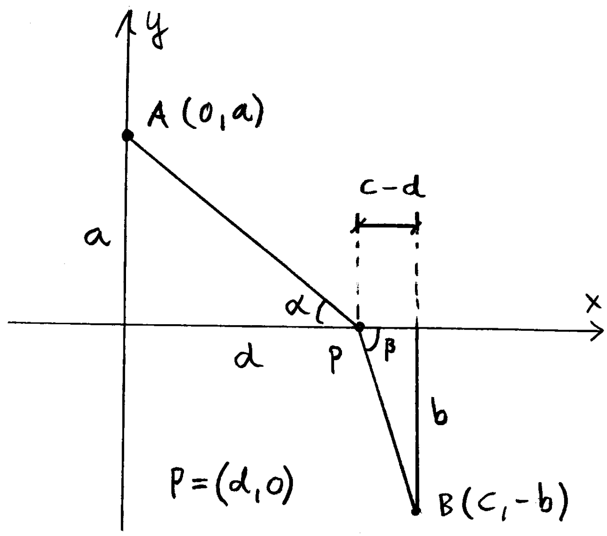
Perustele, miksi nopeimmalla mahdollisella reitillä on

$$\frac{\cos\alpha}{v_1} = \frac{\cos\beta}{v_2}$$

Tilannekuva



Ratkaisu
Merkitään pistettä $P(d, 0)$, jolloin saadaan seuraava tilannekuva



Pythagoraan lauseen mukaan

$$|AP| = \sqrt{a^2 + d^2} \tag{1}$$
$$|BP| = \sqrt{b^2 + (c-d)^2} \tag{2}$$

Matka-aika on

$$t(d) = \frac{|AP|}{v_1} + \frac{|BP|}{v_2}$$
$$t(d) = \frac{\sqrt{a^2+d^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(c-d)^2}}{v_2}$$
$$t(d) = \frac{1}{v_1}\left(a^2+d^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{v_2}\left[b^2+(c-d)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

Matka-ajan derivaatta d:n suhteen on

$$\begin{aligned} t'(d) &= \frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{v_1}\left(a^2+d^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}d + \frac{1}{2}\frac{1}{v_2}\left[b^2+(c-d)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{D}\left[b^2+(c-d)^2\right] \\ &= \frac{d}{v_1}\left(a^2+d^2\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\cancel{2}v_2}\left[b^2+(c-d)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2} \cdot (c-d) \cdot (-1) \\ &= \frac{d}{v_1}\left(a^2+d^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{c-d}{v_2}\left[b^2+(c-d)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} t'(d) &= 0 \\ \frac{d}{v_1}\left(a^2+d^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{c-d}{v_2}\left[b^2+(c-d)^2\right]^{-\frac{1}{2}} &= 0 \\ \frac{1}{v_1}\frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}} &= \frac{1}{v_2}\frac{c-d}{\sqrt{b^2+(c-d)^2}} \quad \| \text{ Sij. (1) ja (2)} \\ \frac{1}{v_1}\frac{d}{|AP|} &= \frac{1}{v_2}\frac{c-d}{|BP|} \end{aligned}$$

Kuvan perusteella $\frac{d}{|AP|} = \cos\alpha$ ja $\frac{c-d}{|BP|} = \cos\beta$. Sijoittamalla nämä edelliseen yhtälöön saadaan

$$\frac{1}{v_1}\cos\alpha = \frac{1}{v_2}\cos\beta$$
$$\frac{\cos\alpha}{v_1} = \frac{\cos\beta}{v_2} \tag{4}$$

Matka-aika (3) kasvaa selvästi rajatta, kun $d \to \infty$ tai $d \to -\infty$. Matka-ajan pienin arvo täytyy siis olla derivaatan nollakohdassa, jolloin täytyy olla voimassa yhtälö (4). Yhtälö (4) on sama kuin tehtävänannossa annettu yhtälö, joten tehtävänannossa annetun yhtälön täytyy siis olla voimassa nopeimmalla reitillä.