MAFY-VALMENNUS

MAFYNETTI

Valmistaudu pitkän- tai lyhyen matematiikan kirjoituksiin ilmaiseksi Mafynetti-ohjelmalla!

- Harjoittelu tehdään aktiivisesti tehtäviä ratkomalla. Tehtävät kattavat kaikki yo-kokeessa tarvittavat asiat.
- Lasket kynällä ja paperilla, mutta Mafynetti opettaa ja neuvoo videoiden ja ratkaisujen avulla.
- Mafynetti huolehtii kertauksesta, joten et unohda oppimiasi asioita.
- Mafynetti on nyt kokonaan ilmainen!

Lataa ilmaiseksi mafyvalmennus.fi/mafynetti

Matematiikan koe 2011

Diplomi-insinöörikoulutuksen yhteisvalinnassa

MAFY-valmennuksen mallivastaukset, 11.3.2012

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet diplomi-insinööri Antti Suominen ja filosofian maisteri Teemu Kekkonen. Antti on toiminut neljä vuotta tuntiopettajana Teknillisessä korkeakoulussa ja sen jälkeen lukiossa. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fysiikkaa. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen ja opettavat sen kaikilla kursseilla ympäri vuoden. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, matematiikan ja fysiikan valmennuskursseihin erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- TKK-pääsykoekurssit
- arkkitehtiosastojen pääsykoekurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- yksityisopetus

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:

internet:	`www.mafyvalmennus.fi`
s-posti:	`info@mafyvalmennus.fi`
puhelin:	(09) 3540 1373

1. Ratkaise yhtälöt

(a) $x - \frac{10}{x} = 3$
(b) $4 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^{-x} = 9$
(c) $\sin x = 1 - \cos^2 x, \quad 0 \le x \le \pi$

Ratkaisu.

(a)

$$\begin{aligned} x - \frac{10}{x} &= 3 \quad \| \cdot x, \quad x \neq 0 \\ x^2 - 10 &= 3x \\ x^2 - 3x - 10 &= 0 \\ x &= \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2} \\ x &= \frac{3 \pm 7}{2} \\ \underline{\underline{x = 5}} &\quad \text{tai} \quad \underline{\underline{x = -2}} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 4 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^{-x} &= 9 \\ 4 \cdot 2^x + 2 \cdot (2^x)^{-1} &= 9 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $2^x = U$.

$$\begin{aligned} 4U + 2U^{-1} &= 9 \quad \| \cdot U, \text{ määrittelyehto } U \neq 0 \\ 4U^2 - 9U + 2 &= 0 \\ U &= \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{8} \\ U &= \frac{9 \pm 7}{8} \\ U &= 2 \quad \text{tai} \quad U = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} U &= 2^x \quad \| \ln() \\ \ln U &= x \cdot \ln 2 \quad \| : \ln 2 \\ x &= \frac{\ln U}{\ln 2} \quad \| \text{sij. } U\text{:n arvot} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\ln 2}{\ln 2} \quad \text{tai} \quad & x &= \frac{\ln \frac{1}{4}}{\ln 2} \\ x &= 1 & x &= \frac{\ln 2^{-2}}{\ln 2} \\ & & x &= \frac{-2 \ln 2}{\ln 2} \\ & & x &= -2 \end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{x = 1 \text{ tai } x = -2}}$

(c) $\sin x = 1 - \cos^2 x, \quad 0 \leq x \leq \pi$
Koska $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, niin $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$.

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin^2 x \\ \sin^2 x - \sin x &= 0 \\ \sin x(\sin x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= 0 \quad \text{tai} \quad & \sin x - 1 &= 0 \\ x &= n\pi & \sin x &= 1 \\ & & x &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{aligned}$$

Välillä $0 \leq x \leq \pi$ olevat ratkaisut ovat $\underline{\underline{x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} \text{ ja } x = \pi.}}$

2. Nesteet A ja B on sekoitettu yhteen. Nesteen A osuus seoksen painosta on p ja osuus tilavuudesta q.

   (a) Mikä on nesteiden A ja B tiheyksien suhde?

   (b) Olkoot $p = 31\,\%$, $q = 37\,\%$ ja seoksen tiheys $0{,}889\,\mathrm{kg/dm^3}$. Mitkä ovat nesteiden A ja B tiheydet? Anna vastaukset kolmen desimaalin tarkkuudella.

Ratkaisu.

(a) Merkitään

$$\begin{array}{ll} V & \text{on seoksen tilavuus} \\ m & \text{on seoksen massa} \end{array}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} m_A &= pm \\ m_B &= (1-p)m \\ V_A &= qV \\ V_B &= (1-q)V \\ \rho_A &= m_A/V_A = \frac{pm}{qV} \qquad (1) \\ \rho_B &= m_B/V_B = \frac{(1-p)m}{(1-q)V} \qquad (2) \end{aligned}$$

Tiheyksien suhde

$$\frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{\frac{p\cancel{m}}{q\cancel{V}}}{\frac{(1-p)\cancel{m}}{(1-q)\cancel{V}}} = \frac{p(1-q)}{q(1-p)}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Tiheyksien suhde on } \frac{p(1-q)}{q(1-p)}}}$.

(b) Yhtälöistä (1) ja (2) saadaan

$$\rho_A = \frac{p}{q}\cdot\frac{m}{v} = \frac{0{,}31}{0{,}37}\cdot 0{,}889\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm^3}} = 0{,}7448\ldots\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm^3}} \approx 0{,}745\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm^3}}$$

$$\rho_B = \frac{1-0{,}31}{1-0{,}37}\cdot 0{,}889\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm^3}} = 0{,}9736\ldots\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm^3}} \approx 0{,}974\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm^3}}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\rho_A = 0{,}745\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm^3}} \text{ ja } \rho_B = 0{,}974\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm^3}}}}$.

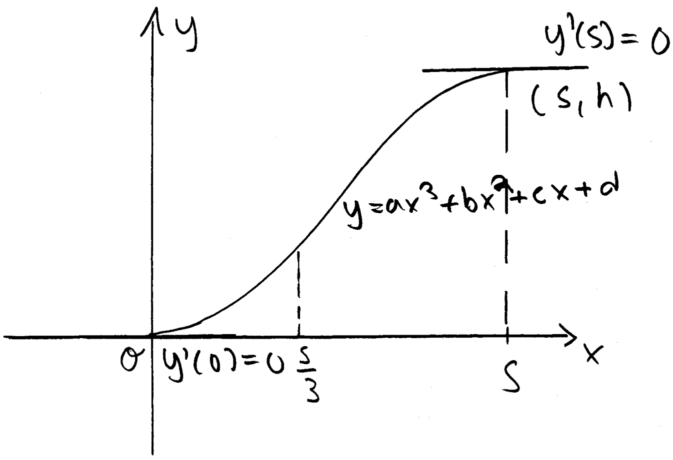
3. Laskeutumisen alkaessa lentokone lentää vaakasuoraan. Tällöin kone on korkeudella $y = h$ ja vaakasuoralla etäisyydellä $x = s$ kiitoradasta. Kone koskettaa kiitorataa origossa vaakalennossa.

Oletetaan, että laskeutumisen aikana

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Kuinka korkealla kone on, kun sen vaakasuora etäisyys kiitoradasta on $\frac{1}{3}s$?

Ratkaisu.



$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$y'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Lentorata $y(x)$ kulkee pisteen $(0, 0)$ kautta, joten

$$0 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$$
$$d = 0.$$

Kohdassa $x = 0$ lentoradan tangentti on vaakasuora, joten

$$y'(0) = 0$$
$$3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0$$
$$c = 0.$$

Yhtälö ja derivaatta saavat muodon:

$$y = ax^3 + bx^2,$$
$$y'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

Kohdassa $x = s$ lentoradan tangentti on vaakasuora, joten

$$\begin{aligned} y'(s) &= 0 \\ 3as^2 + 2bs &= 0 \\ 2bs &= -3as^2 \quad \| : 2s \\ b &= -\frac{3}{2}as. \end{aligned}$$

Lentorata $y(x)$ kulkee pisteen (s, h) kautta, joten

$$\begin{aligned} h &= a \cdot s^3 - \frac{3}{2}as \cdot s^2 \\ h &= -\frac{1}{2}as^3 \quad \| \cdot \left(-\frac{2}{s^3}\right) \\ a &= -\frac{2h}{s^3} \end{aligned}$$

Yhtälö on siis

$$\begin{aligned} y &= -\frac{2h}{s^3}x^3 - \frac{3}{\cancel{2}_1} \cdot \left(-\frac{\overset{1}{\cancel{2}}h}{\underset{s^2}{\cancel{s^3}}}\right) \overset{1}{\cancel{s}} \cdot x^2 \\ y &= -\frac{2h}{s^3}x^3 + \frac{3h}{s^2}x^2. \end{aligned}$$

Lasketaan korkeus kohdassa $x = \frac{s}{3}$.

$$\begin{aligned} y\left(\tfrac{s}{3}\right) &= -\frac{2h}{s^3} \cdot \left(\frac{s}{3}\right)^3 + \frac{3h}{s^2}\left(\frac{s}{3}\right)^2 \\ &= -\frac{2h\overset{1}{\cancel{s^3}}}{\underset{1}{\cancel{s^3}} \cdot 27} + \frac{3h\overset{1}{\cancel{s^2}}}{\underset{1}{\cancel{s^2}} \cdot 9} \\ &= \frac{7}{27}h \end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Kone on korkeudella } \frac{7}{27}h.}}$

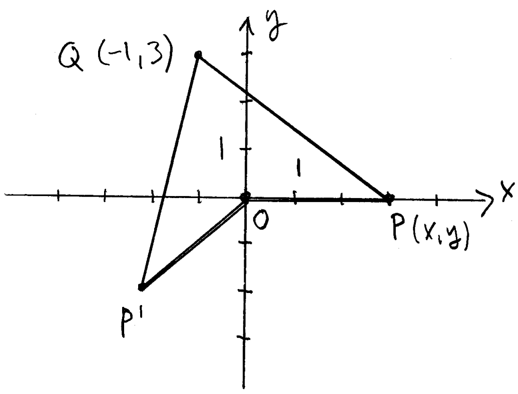
4. Robottikäsi muodostuu kahdesta vaakatasossa liikkuvasta varresta OP ja PQ. Varsilla on yhteinen nivel P. Käden piste O on kiinnitetty origoon. Varsien pituudet ovat $|OP| = 3$ ja $|PQ| = 5$.

   (a) Käden tarttumapiste Q on pisteessä $(-1, 3)$. Missä on nivelpiste P?

   (b) Kättä liikutetaan siten, että tarttumapiste Q siirtyy lyhintä mahdollista reittiä pisteestä $(-3, 2)$ pisteeseen $(2, 0)$. Kuinka pitkän matkan Q kulkee?

Ratkaisu.

(a)



Pisteelle $P(x, y)$ pätee

$$\begin{cases} |\overline{OP}| = 3 \\ |\overline{PQ}| = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \quad \| \,(\,)^2 \\ \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = 5 \quad \| \,(\,)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \quad \| \cdot (-1) \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 25 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} -x^2 - y^2 \qquad\qquad + \;\; 9 = 0 \\ \;\; x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0 \end{cases}$$

$$2x - 6y - \;\; 6 = 0$$

$$2x = 6y + 6 \quad \| : 2$$

$$x = 3y + 3 \tag{2}$$

Sijoitetaan (2) yhtälöön (1).

$$\begin{aligned}
(3y+3)^2 + y^2 &= 9 \\
9y^2 + 18y + 9 + y^2 &= 9 \\
10y^2 + 18y &= 0 \\
2y(5y+9) &= 0
\end{aligned}$$

$$2y = 0 \quad \text{tai} \quad 5y + 9 = 0 \quad \| : 5$$

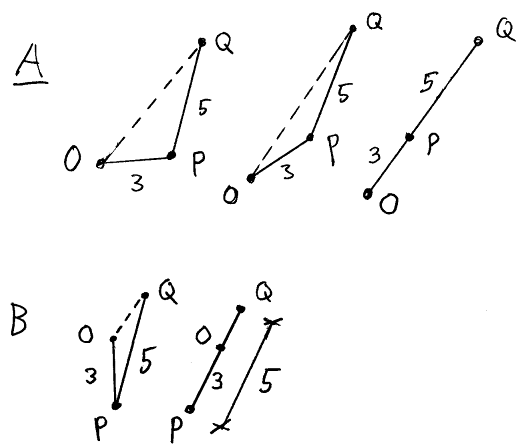
$$y = 0 \qquad\qquad y = -\frac{9}{5}$$

Vastaavat x:n arvot ovat

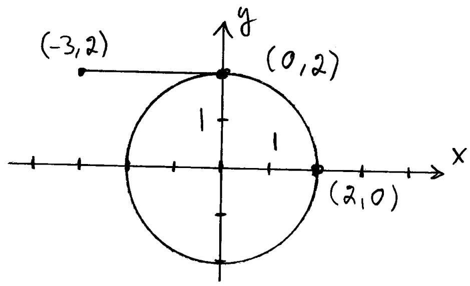
$$x = 3 \cdot 0 + 3 = 3 \quad \text{tai} \quad x = 3 \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) + 3 = -\frac{12}{5}$$

Vastaus: $\underline{\underline{P = (3, 0) \text{ tai } P = \left(-\frac{12}{5}, -\frac{9}{5}\right)}}$.

(b)



Robottikäsi ulottuu origosta matkan OQ. Kuvasarjan A ensimmäisen kuvan mukaisesti OQ on kolmion OPQ sivu. Robottikäsi ulottuu kauemmas, kun kulmaa P kasvatetaan. Kun P on oikokulma, niin OQ on suurimmillaan. Tällöin kolmio OPQ typistyy janaksi OQ, jonka pituus on $3 + 5 = 8$. Kuvasarjan B mukaisesti OQ lyhenee, kun kulmaa P pienennetään. OQ on lyhin, kun kulma P on $0°$, jolloin kolmio OPQ typistyy janaksi PQ, jonka pituus on $5 - 3 = 2$. Kolmion OPQ sivun OQ pituus on siis välillä $2 \ldots 8$ ja toisaalta kolmiota voidaan pyörittää mielivaltaiseen asentoon pisteen O suhteen. Näin ollen robottikäsi ulottuu mihin tahansa pisteeseen, jonka etäisyys origosta on vähintään 2 ja enintään 8.



Piste Q ei voi liikkua origokeskisen 2-säteisen ympyrän sisäpuolella, joten pisteestä $(-3, 2)$ ei voida mennä suoraan pisteeseen $(2, 0)$. Lyhin mahdollinen reitti on, kun kuljetaan pisteestä $(-3, 2)$ suoraan pisteeseen $(0, 2)$ ja sen jälkeen pisteeseen $(2, 0)$ origokeskisen 2-säteisen ympyrän kaarta pitkin neljännesympyrän verran. Kuljettu matka on tällöin

$$S = 0 - (-3) + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 = 3 + \pi$$

Vastaus: $\underline{\underline{Q \text{ kulkee matkan } 3 + \pi.}}$

5. Vuonna 2011 uudentyyppisen influenssaviruksen aiheuttama sairastumistodennäköisyys on kaikilla 20 %. Yleisesti henkilön alttius sairastua tarkasteltavana vuonna riippuu hänen hankkimastaan immuniteetista:

   Jos henkilö on ollut sairas tarkasteltavaa vuotta edeltävänä vuonna, on hänen todennäköisyytensä sairastua tarkasteltavana vuonna 30 % edellisen vuoden vastaavasta todennäköisyydestä.

   Jos henkilö on ollut terve tarkasteltavaa vuotta edeltävän vuoden, on hänen todennäköisyytensä pysyä terveenä koko tarkasteltava vuosi 45 % edellisen vuoden vastaavasta todennäköisyydestä.

   (a) Henkilö ei sairasta vuonna 2011. Millä todennäköisyydellä hän sairastaa vuonna 2012?
   (b) Henkilö ei sairasta vuonna 2011. Millä todennäköisyydellä hän sairastaa vuonna 2013?

Ratkaisu.

(a) Merkitään p_n:llä todennäköisyyttä, että henkilö sairastuu vuonna n. Todennäköisyys sille, että henkilö pysyy terveenä vuonna n on vastatapahtuman todennäköisyys $\bar{p}_n$. Mikäli henkilö sairastuu vuonna n, niin tehtävänannon mukaan

$$p_{n+1} = 0{,}3p_n. \tag{1}$$

Mikäli henkilö pysyy terveenä vuonna n, niin tehtävänannon mukaan

$$\begin{aligned}\bar{p}_{n+1} &= 0{,}45\bar{p}_n\\ 1 - p_{n+1} &= 0{,}45(1 - p_n)\\ 1 - p_{n+1} &= 0{,}45 - 0{,}45p_n\\ p_{n+1} &= 0{,}45p_n + 0{,}55 \qquad (2)\end{aligned}$$

Tiedetään, että $p_{2011} = 0{,}2$. Kaavan (2) mukaan

$$\begin{aligned}p_{2012} &= 0{,}45p_{2011} + 0{,}55\\ &= 0{,}45 \cdot 0{,}2 + 0{,}55\\ &= 0{,}64\end{aligned}$$

Vastaus: Kysytty todennäköisyys on 0,64.

(b) Henkilö voi tulla sairaaksi vuonna 2013 kahdella eri tavalla. Joko niin, että hän on terve vuonna 2012 ja sairastuu vuonna 2013 tai niin, että hän sairastuu sekä vuonna 2012 että 2013. Nimetään nämä tapahtumat TTS

ja TSS, jossa ensimmäinen T viittaa vuoteen 2011. Tutkitaan erikseen tapahtumien TTS ja TSS todennäköisyydet.
TTS:

$$p_{2012} = 0{,}64$$

Kaavan (2) mukaan

$$\begin{aligned} p_{2013} &= 0{,}45p_{2012} + 0{,}55 \\ &= 0{,}45 \cdot 0{,}64 + 0{,}55 \\ &= 0{,}838 \end{aligned}$$

Todennäköisyys

$$\begin{aligned} P(\text{TTS}) &= \bar{p}_{2012} \cdot p_{2013} \\ &= (1 - 0{,}64) \cdot 0{,}838 \\ &= 0{,}30168 \end{aligned}$$

TSS:

$$p_{2012} = 0{,}64$$

Kaavan (1) mukaan

$$\begin{aligned} p_{2013} &= 0{,}3p_{2012} \\ &= 0{,}3 \cdot 0{,}64 \\ &= 0{,}192 \end{aligned}$$

Todennäköisyys

$$\begin{aligned} P(\text{TSS}) &= p_{2012} \cdot p_{2013} \\ &= 0{,}64 \cdot 0{,}192 \\ &= 0{,}12288 \end{aligned}$$

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(\text{TTS tai TSS}) &= P(\text{TTS}) + P(\text{TSS}) \\ &= 0{,}30168 + 0{,}12288 \\ &= 0{,}42456 \end{aligned}$$

Vastaus: Kysytty todennäköisyys on 0,42.

6. Käyrän $y = f(x)$ kaarenpituus, K, välillä $a \le x \le b$ on

$$K = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Laske käyrän $y = \frac{1}{4}(x^2 - 2\ln|x|)$ kaarenpituus välillä $-2 \le x \le -1$.

Ratkaisu. Merkitään

$$y = f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 2\ln|x|).$$

Tällöin

$$f'(x) = \frac{1}{4}\left(2x - \frac{2}{x}\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^{-1}.$$

Kaarenpituus on

$$\begin{aligned}
&\int_{-2}^{-1} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^{-1}\right)^2}\, dx \\
&= \int_{-2}^{-1} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}x^{-1} + \left(\frac{1}{2}x^{-1}\right)^2}\, dx \\
&= \int_{-2}^{-1} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}x^{-1}\right)^2}\, dx \\
&= \int_{-2}^{-1} \sqrt{\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}x^{-1}\right)^2}\, dx \\
&= \int_{-2}^{-1} \sqrt{\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}x^{-1} + \left(\frac{1}{2}x^{-1}\right)^2}\, dx \\
&= \int_{-2}^{-1} \sqrt{\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^{-1}\right)^2}\, dx \\
&= \int_{-2}^{-1} \left|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^{-1}\right|\, dx
\end{aligned}$$

Tutkitaan funktion $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^{-2}$ merkkiä välillä $[-2, -1]$. Määrittelyehto on $x \ne 0$. Nollakohdat:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^{-1} &= 0 \quad \| \cdot 2x \\
x^2 + 1 &= 0 \\
x^2 &= -1
\end{aligned}$$

ei ratkaisua

$g(x)$ on määritelty välillä $[-2,-1]$ eikä siellä ole nollakohtia, joten $g(x)$ on saman merkkinen koko välillä.

$$g(-1{,}5) = \frac{1}{2} \cdot (-1{,}5) + \frac{1}{2} \cdot (-1{,}5)^{-1} = -\frac{13}{12} < 0$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{-1} \left| \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^{-1} \right| dx &= \int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^{-1} \right) dx \\
&= \Big/_{\!\!-2}^{-1} \left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln|x| \right) \\
&= -\frac{1}{4} \cdot (-1)^2 - \frac{1}{2}\ln|-1| + \frac{1}{4} \cdot (-2)^2 + \frac{1}{2}\ln|-2| \\
&= -\frac{1}{4} - 0 + 1 + \frac{1}{2}\ln|-2| \\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2
\end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Kysytty kaarenpituus on } \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.}}$