MAFY-VALMENNUS

MAFYNETTI

Valmistaudu pitkän- tai lyhyen matematiikan kirjoituksiin ilmaiseksi Mafynetti-ohjelmalla!

- Harjoittelu tehdään aktiivisesti tehtäviä ratkomalla. Tehtävät kattavat kaikki yo-kokeessa tarvittavat asiat.
- Lasket kynällä ja paperilla, mutta Mafynetti opettaa ja neuvoo videoiden ja ratkaisujen avulla.
- Mafynetti huolehtii kertauksesta, joten et unohda oppimiasi asioita.
- Mafynetti on nyt kokonaan ilmainen!

Lataa ilmaiseksi mafyvalmennus.fi/mafynetti

Matematiikan koe 2010

Diplomi-insinöörikoulutuksen yhteisvalinnassa

MAFY-valmennuksen mallivastaukset, 14.1.2012

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet diplomi-insinööri Antti Suominen ja filosofian maisteri Teemu Kekkonen. Antti on toiminut neljä vuotta tuntiopettajana Teknillisessä korkeakoulussa ja sen jälkeen lukiossa. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fysiikkaa. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen ja opettavat sen kaikilla kursseilla ympäri vuoden. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, matematiikan ja fysiikan valmennuskursseihin erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- TKK-pääsykoekurssit
- arkkitehtiosastojen pääsykoekurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- yksityisopetus

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:

internet:	www.mafyvalmennus.fi
s-posti:	info@mafyvalmennus.fi
puhelin:	(09) 3540 1373

A1. Yritys myy katuvalaisimia 60000 kappaletta vuodessa. Valaisimien hankintahinta on 430 €/kpl. Tehtaan kanssa sovitaan kaikille tilauserille kiinteä koko n kappaletta valaisimia per erä. Yrityksen varasto mitoitetaan tilauserän mukaan, ja varastotilasta maksetaan 24 n €/vuosi. Valaisinerän toimitus tehtaalta maksaa 961 € erän koosta riippumatta. Uusi valaisinerä tilataan saapumaan vasta, kun edellinen erä on kokonaisuudessaan toimitettu varastosta asiakkaalle.

a) Mikä tulisi valaisimen myyntihinnan olla euroina ja sentteinä, jotta yllämainitut kulut katettaisiin, kun $n = 5000$?

b) Mikä tilauserän koon n tulisi olla, jotta kustannukset minimoituisivat?

Ratkaisu
Hankintahinta yhdelle lampulle on 430 €.
Vuodessa hankittavien valaisimien yhteishinta on $60000 \cdot 430$ €$= 25800000$ €.
Kun varastoon hankitaan n kappaleen suuruinen erä lamppuja, ovat varastointikulut vuodessa $24n$.
Edellä mainitun suuruisia eriä tarvitaan vuodessa $\frac{60000}{n}$ kpl, joten toimituskulut ovat vuodessa $\frac{961 \cdot 60000}{n}$ €.

a) Nyt toimituserän suuruus on $n = 5000$. Merkitään valaisimien myyntihinnaksi x.

Kun myyntitulot ovat yhtä suuret kuin kulut, on

$$\begin{aligned}
60000x &= 25800000 + 24n + \frac{961 \cdot 60000}{n} \quad \| ,\ \text{sij.} n = 5000 \\
60000x &= 25800000 + 24 \cdot 5000 + \frac{961 \cdot 60000}{5000} \quad \| : 60000 \\
x &= \frac{25931532}{6000} \\
x &= 432{,}1922 \\
x &\approx 432{,}20 \quad (€)
\end{aligned}$$

Pyöristys on tehty pyöristyssääntöjen vastaisesti ylöspäin, koska tehtävänannossa vaadittiin, että kaikki kulut saadaan katettua.

Vastaus: Myyntihinnan pitäisi olla 432 € 20 snt.

b)
Muodostetaan funktio kuluille n:n avulla. $f(n) = 24n + 25800000 + \frac{961 \cdot 60000}{n}$,

missä $n > 0$.

Etsittäessä lausekkeen suurinta arvoa voidaan tutkia vastaavaa x:n funktiota $f(x) = 24x + 25800000 + \frac{961 \cdot 60000}{x}$, missä x kuuluu reaalilukuihin ja $x > 0$.

Etsitään funktion pienin arvo derivaatan avulla. Funktion derivaatta on

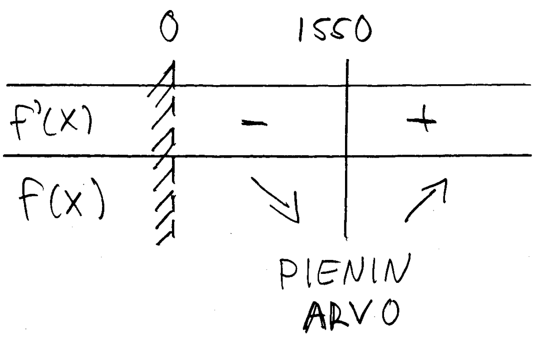
$$\begin{aligned} f'(x) &= 24 - 961 \cdot 60000x^{-2} \\ &= 24 - \frac{57660000}{x^2}. \end{aligned}$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 24 - \frac{57660000}{x^2} &= 0 \\ 24 &= \frac{57660000}{x^2} \quad \| \cdot \frac{x^2}{24} \\ x^2 &= \frac{57660000}{24} \\ x &= {}_{(}\underset{}{\pm}{}_{)} \sqrt{2402500} \\ x &= 1550 \end{aligned}$$

Muodostetaan funktion kulkukaavio.

$f'(1) = 24 - \dfrac{57660000}{1^2} = -57659976 < 0$
$f'(2000) = 18{,}5585 > 0$.



$f(x)$ saa siten pienimmän arvonsa, kun $x = 1550$. Tällöin $f(n)$ saa pienimmän arvonsa, kun $n = 1550$.

Vastaus: <u>Tilauserän koon tulisi olla 1550 kappaletta.</u>

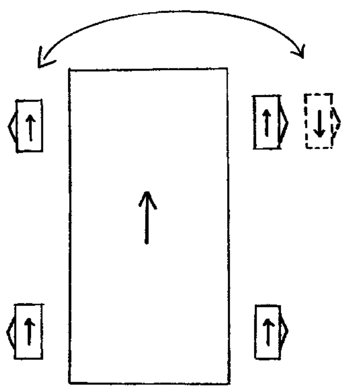
A2. Auton pyörä koostuu vanteelle asennetusta renkaasta. Auton renkaalla on suositeltu pyörimissuunta. Vanteet voidaan asentaa paikalleen vain ”sisäpuoli” autoon päin, rengas vanteelle kumminpäin vain. Etu- ja takapyörät ovat samanlaiset.

a) Auton neljä pyörää on otettu pois huollon ajaksi. Ne tulisi asentaa takaisin säilyttäen kunkin renkaan suositeltu pyörimissuunta. Millä todennäköisyydellä näin käy, jos pyörät asennetaan takaisin satunnaisesti?

b) Neljä rengasta asennetaan vanteille ja pyörät edelleen auton alle - kaikki tapahtumat tehdään satunnaisesti toisistaan riippumatta. Millä todennäköisyydellä kaikilla renkailla on niille suositeltu pyörimissuunta?

Ratkaisu
(Huomautus lukijalle: Tässä tehtävässä on tarkasti määritelty, että pyörällä tarkoitetaan metallisen keskiosan ja kumisen ulko-osan muodostamaa kokonaisuutta. Kumiosaa kutsutaan renkaaksi ja metalliosaa vanteeksi. Näitä nimityksiä täytyy huolellisesti noudattaa tehtävää tulkitessa ja ratkoessa. Usein ihmiset tarkoittavat renkaasta puhuessaan sitä, mikä tässä tehtävässä on nimetty pyöräksi.)

Alla oleva kuva esittää autoa ja siihen kiinnitettäviä pyöriä. Autoon on merkitty sen kulkusuunta ja pyöriin renkaiden pyörimissuunnat. Matala kolmio pyörien kyljessä merkitsee vanteen sitä puolta, joka tulee osoittaa ulospäin autosta, kun vanne on kiinnitetty paikalleen. Kuvassa kaikki pyörät katkoviivalla merkittyä lukuun ottamatta on asetettu oikeille paikoilleen, koska pyörimissuunta ja vanteen ulkopinta asettuvat oikein.



Tarkastellaan oikeaa etupyörää. Jos rengas laitetaan vanteelle toisin päin kuin oikeassa etupyörässä, niin syntyy katkoviivalla esitetyn mukainen pyörä, joka on erilainen. Pyöriä voi siis olla kahta eri tyyppiä. Jos tämä pyörä siirretään auton vasemmalle puolelle ja käännetään vanteen ulkopinta autosta ulospäin, niin pyörimissuunta asettuu oikeaksi. Toisentyyppinen pyörä sopii siis auton vasemmalle puolelle. Kutsutaan oikealle sopivaa pyörää oikeakätiseksi ja vasemmalle sopivaa vasenkätiseksi.

a)
Pois otettujen pyörien joukossa on kaksi oikeakätistä ja kaksi vasenkätistä pyörää. Lasketaan todennäköisyys sille, että pyörien kätisyydet tulevat oikein, kun ne asennetaan takaisin sattumanvaraisesti. Oletetaan, että asentaja asentaa ensin pyörät oikealle ja sitten vasemmalle puolelle. Järjestys ei vaikuta todennäköisyyteen, että pyörät tulevat oikein.

1. pyörä.
Kaksi neljästä pyörästä on oikeakätisiä, joten todennäköisyys, että kätisyys tulee oikein on $P(1.) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

2. pyörä.
Yksi jäljellä olevista kolmesta pyörästä on oikeakätinen, joten $P(2.) = \frac{1}{3}$.

Molemmat jäljelle jääneet pyörät ovat vasenkätisiä, joten vasemmalle asennettavat pyörät asennetaan nyt varmasti oikein. Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(A) &= P(1. \text{ ja } 2.) \\ &= P(1.) \cdot P(2.) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} \\ &= 0{,}1666\ldots \\ &\approx 16,7\%. \end{aligned}$$

Vastaus: Todennäköisyys on 16,7 % (tai $\frac{1}{6}$).

b)

Tapa 1
Tarkastellaan asennuksen lopputulosta, jossa kaikki pyörät ovat paikallaan. Tarkastellaan yksittäistä autoon asennettua vannetta. Vanne on väistämättä asennettu oikein, koska se voidaan kiinnittää vain yhdellä tavalla. Vanteen päällä oleva rengas on asennettu vanteelle sattumanvaraisesti, joten todennäköisyys sille, että renkaan pyörimissuunta on oikea on $p = \frac{1}{2}$. Täsmälleen sama päättely voidaan toistaa kaikille autoon asennetuille vanteille ja niiden päällä oleville renkaille. Näin ollen todennäköisyys sille, että kaikkien renkaiden pyörimissuunta on oikea on $P = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

Vastaus: Kysytty todennäköisyys on 6,25 % (tai $\frac{1}{16}$).

Tapa 2

Jotta pyörät on mahdollista asentaa oikein, täytyy niiden joukossa olla kaksi oikeakätistä ja kaksi vasenkätistä pyörää. Kun renkaat asennetaan vanteille satunnaisesti, niin todennäköisyys sille, että yksittäisestä pyörästä tulee oikeakätinen on $p = \frac{1}{2}$. Todennäköisyys sille, että tasan kaksi pyörää neljästä tulee oikeakätisiksi voidaan laskea binomitodennäköisyyden kaavalla. Nyt siis $n = 4$ ja $k = 2$ ja todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(S) &= P(\text{"Kahdella pyörällä on samat pyörimissuunnat"}) \\ &= P(k = 2) \\ &= \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

a-kohdassa laskettiin todennäköisyys $P(A)$, että pyörät asennetaan oikein autoon, kun renkaat on asennettu vanteille oikein. Todennäköisyys sille, että renkaat ensin asennetaan vanteille oikein ja sen jälkeen pyörät autoon oikein on

$$\begin{aligned} P(B) &= P(S \text{ ja } A) \\ &= P(S) \cdot P(A) \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{16} \\ &= 0{,}0625 \\ &= 6{,}25 \end{aligned}$$

Vastaus: Kysytty todennäköisyys on 6,25 % (tai $\frac{1}{16}$).

A3. Olkoon $f(x) = |2x-6|$.

a) Laske $\int_0^4 f(x)\,dx$.

b) Määritä funktion f se integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(3,0)$ kautta.

Ratkaisu
$f(x) = |2x-6|$.
Itseisarvon sisällä oleva lauseke saa positiivisia arvoja, kun

$$\begin{aligned} 2x-6 &\geq 0 \\ 2x &\geq 6 \quad \| :2 \\ x &\geq 3. \end{aligned}$$

Esitetään itseisarvo paloittain määriteltynä funktiona

$$f(x) = \begin{cases} 2x-6; & x \geq 3 \\ 6-2x; & x < 3 \end{cases}$$

Lasketaan määrätty integraali

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x)dx &= \int_0^4 |2x-6|dx \\ &= \int_0^3 (6-2x)dx + \int_3^4 (2x-6)dx \\ &= \Big/_0^3 (6x-x^2) + \Big/_3^4 (x^2-6x) \\ &= (6\cdot 3 - 3^2 - 0) + (4^2 - 6\cdot 4 - (3^2 - 6\cdot 3)) \\ &= \underline{\underline{10.}} \end{aligned}$$

b)
Merkitään funktion f integraalifunktiota F:llä. Integroidaan f paloittain.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)dx \\ &= \int |2x-6|dx \\ &= \begin{cases} \int (2x-6)dx; & x \geq 3 \\ \int (6-2x)dx; & x < 3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2-6x+C; & x \geq 3 \\ 6x-x^2+D; & x < 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Koska funktion $F(x)$ kuvaaja kulkee pisteen $(3,\, 0)$ kautta on $F(3) = 0$. Näin ollen

$$\begin{aligned} 3^2 - 6 \cdot 3 + C &= 0 \\ C &= 9. \end{aligned}$$

Lisäksi integraalifunktio on aina jatkuva, joten täytyy olla

$$F(3) = \lim_{x \to 3^+} F(x) = \lim_{x \to 3^-} F(x).$$

Tällöin

$$\begin{aligned} 3^2 - 6 \cdot 3 + 9 &= 6 \cdot 3 - 3^2 + D \\ D &= -9. \end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{F(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 9; & x \geq 3 \\ -x^2 + 6x - 9; & x < 3 \end{cases}.}}$

A4. Tarkastellaan kolmiota ABC. Pisteet P, Q, R jakavat kolmion sivut suhteessa

$$|\overline{AP}| : |\overline{AB}| = |\overline{BQ}| : |\overline{BC}| = |\overline{CR}| : |\overline{CA}| = 2 : 3.$$

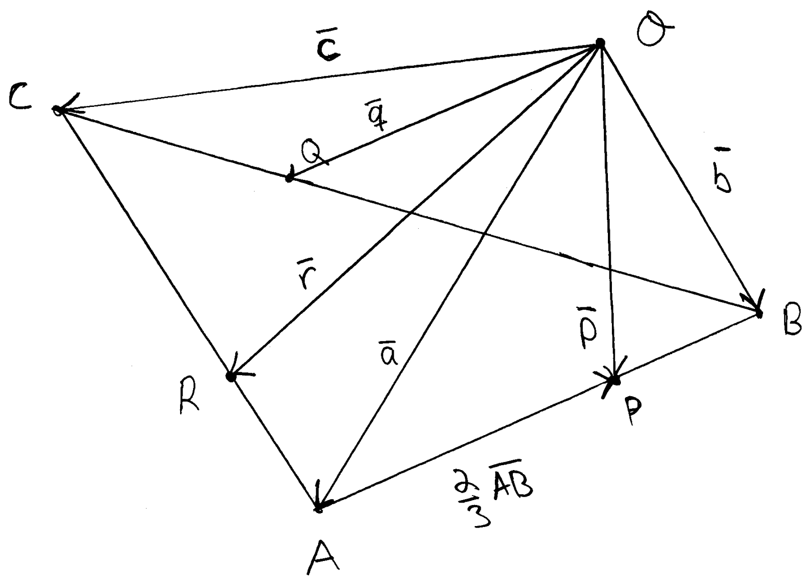
Olkoon O jokin kiinteä piste. Merkitään

$$\begin{aligned} \overline{a} &= \overline{OA}, \quad \overline{b} = \overline{OB}, \quad \overline{c} = \overline{OC}, \\ \overline{p} &= \overline{OP}, \quad \overline{q} = \overline{OQ}, \quad \overline{r} = \overline{OR}. \end{aligned}$$

a) Ratkaise $\overline{p}$ vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ avulla.

b) Osoita laskemalla, että $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{p} + \overline{q} + \overline{r}$.

Ratkaisu



Kuvan mukaisesti voidaan laskea vektori $\overline{AB}$

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{OB} - \overline{OA} \\ &= \overline{b} - \overline{a}. \end{aligned}$$

Nyt voidaan määrittää vektori $\overline{p}$.

$$\begin{aligned} \overline{p} &= \overline{OP} \\ &= \overline{a} + \frac{2}{3}\overline{AB} \quad \| \text{, sij. } \overline{AB} = \overline{b} - \overline{a} \\ &= \overline{a} + \frac{2}{3}(\overline{b} - \overline{a}) \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{3}\overline{a} + \frac{2}{3}\overline{b}}}. \end{aligned}$$

b)
Kuvan merkinnöillä voidaan määrittää vektorien summa seuraavasti.

$$\begin{aligned}\overline{a}+\overline{b}+\overline{c} &= \overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC} \\ &= \overline{p}+\frac{2}{3}\overline{BA}+\overline{q}+\frac{2}{3}\overline{CB}+\overline{p}+\frac{2}{3}\overline{AC} \\ &= \overline{p}+\overline{q}+\overline{p}+\frac{2}{3}(\overline{BA}+\overline{AC}+\overline{CB}).\end{aligned}$$

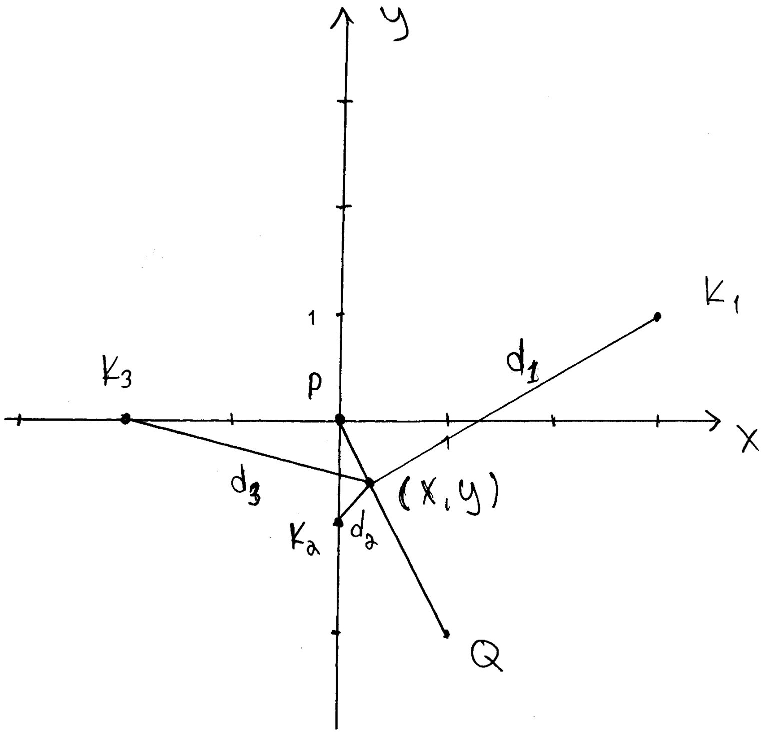
Vektorisumma $\overline{BA}+\overline{AC}+\overline{CB}=0$, koska ko. vektorit muodostavat kuvan mukaisesti kolmion. Tällöin alkuperäinen vektorien summa on

$$\begin{aligned}\overline{a}+\overline{b}+\overline{c} &= \overline{p}+\overline{q}+\overline{p}+\frac{2}{3}\cdot\overline{0} \\ &= \underline{\underline{\overline{p}+\overline{q}+\overline{p}.}}\end{aligned}$$

A5. Kolme vetokoiraa, pisteissä $K_1 = (3, 1)$, $K_2 = (0, -1)$ ja $K_3 = (-2, 0)$, ovat jousella kiinni samasta kiinnityslenkistä. Kiinnityslenkki liukuu vapaasti pitkin suoraa vaijeria, jonka päät ovat pisteissä $P = (0, 0)$ ja $Q = (1, -2)$.

Mihin pisteeseen kiinnityslenkki asettuu, kun vetokoirien etäisyyksien neliöiden summa lenkistä (eli jousien potentiaalienergia) minimoituu?

Ratkaisu



Piste (x, y) sijaitsee janalla PQ. Janan kautta kulkevan suoran yhtälö on

$$y - 0 = \frac{-2}{1}(x - 0)$$
$$y = -2x.$$

Jana PQ voidaan nyt määritellä yhtälön avulla seuraavasti:

$$y = -2x \quad , \text{missä } 0 \leq x \leq 1.$$

Piste (x, y) saadaan nyt muotoon $(x, -2x)$.

Lasketaan etäisyyksien neliöt d_1^2, d_2^2 ja d_3^2.

$$\begin{aligned} d_1^2 &= \sqrt{(x-3)^2+(-2x-1)^2}^2 \\ &= x^2-6x+9+4x^2+4x+1 \\ &= 5x^2-2x+10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2^2 &= \sqrt{(x-0)^2+(-2x+1)^2}^2 \\ &= x^2+4x^2-4x+1 \\ &= 5x^2-4x+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3^2 &= \sqrt{(x+2)^2+(-2x-0)^2}^2 \\ &= x^2+4x+4+4x^2 \\ &= 5x^2+4x+4. \end{aligned}$$

Tällöin etäisyyksien neliöiden summa on

$$\begin{aligned} S(x) &= 5x^2-2x+10+5x^2-4x+1+5x^2+4x+4 \\ &= 15x^2-2x+15 \quad \text{, missä } 0 \le x \le 1. \end{aligned}$$

$S(x)$ on derivoituva välillä $]0,\ 1[$ ja jatkuva välillä $[0,\ 1]$, joten sen pienin arvo välillä $[0,1]$ löytyy derivaatan nollakohdasta tai välin päätepisteistä.

Derivoidaan funktio S.

$$S'(x) = 30x - 2$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta.

$$\begin{aligned} S'(x) &= 0 \\ 30x-2 &= 0 \\ 30x &= 2 \quad \| :30 \\ x &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

Lasketaan S:n arvot päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

$$\begin{aligned} S(0) &= 15\cdot 0^2 - 2\cdot 0 + 15 = 15 \\ S(\tfrac{1}{15}) &= 14\tfrac{14}{15} \quad \text{PIENIN ARVO} \\ S(1) &= 28. \end{aligned}$$

Kysytty piste on tällöin $(\frac{1}{15}, -2 \cdot \frac{1}{15}) = (\frac{1}{15}, -\frac{2}{15})$.

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Lenkki asettuu pisteeseen } (\frac{1}{15}, -\frac{2}{15}).}}$

A6. Laske tarkka arvo lausekkeelle $\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k)$, jossa $n = 1000$ ja

a) $a_k = 2^k$,

b) $a_k = k2^k$.

Ratkaisu
Kun $n = 1000$, saadaan summalauseke muotoon

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k) &= \sum_{k=0}^{1000}(a_{k+1}-a_k)\\ &= (a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\ldots+(a_{1000}-a_{999})+(a_{1001}-a_{1000})\\ &= \cancel{a_1}-a_0+\cancel{a_2}-\cancel{a_1}+\ldots+\cancel{a_{1000}}-\cancel{a_{999}}+a_{1001}-\cancel{a_{1000}}\\ &= a_{1001}-a_0.\end{aligned}$$

a) Kun $a_k = 2^k$, saadaan summaksi

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{1000}(a_{k+1}-a_k) &= 2^{1001}-2^0\\ &= \underline{\underline{2^{1001}-1}}.\end{aligned}$$

b) Kun $a_k = k2^k$, saadaan summaksi

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{1000}(a_{k+1}-a_k) &= 1001\cdot 2^{1001}-0\cdot 2^0\\ &= \underline{\underline{1001\cdot 2^{1001}}}.\end{aligned}$$